

[I]

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos^2 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \\ &= \sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 1 = \left(\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

以上から $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, つまり $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ のとき, $f(x)$ は最小値 $\frac{1}{4}$

$\sin 2x = 0$, つまり $x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(x)$ は最大値 1

(答) $x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 1

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$

〔Ⅱ〕

- (1)
- $f(x) = xe^{-x}$
- とおく。曲線
- C_1
- と曲線
- C_2
- の交点は

$$xe^{-x} = 2xe^{-2x}$$

$$xe^{-x}(1 - 2e^{-x}) = 0$$

$$x = 0, \log 2$$

$$f(0) = 0, f(\log 2) = \log 2 \times e^{-\log 2} = \frac{1}{2} \log 2$$

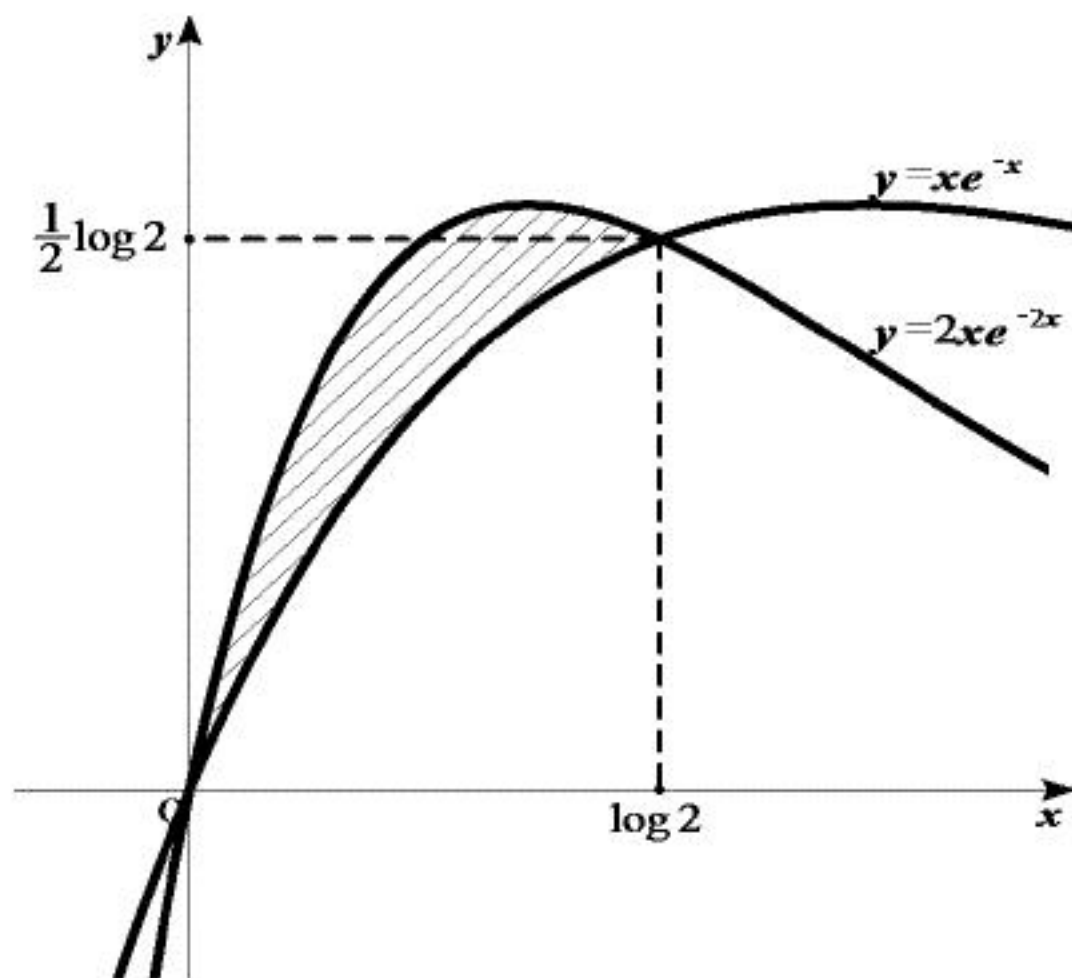
以上から求める交点の座標は、 $(0, 0), \left(\log 2, \frac{1}{2} \log 2\right)$ である。

$$(\text{答}) (0, 0), \left(\log 2, \frac{1}{2} \log 2\right)$$

- (2) 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} (2xe^{-2x} - xe^{-x}) dx &= \left[-xe^{-2x} \right]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} e^{-2x} dx - \left[-xe^{-x} \right]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^{-x} dx \\ &= \left[\left(-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right) + \left(xe^{-x} + e^{-x} \right) \right]_0^{\log 2} \\ &= \left(-\frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{8}$$



〔Ⅲ〕

(1) $C: y^2 = 2x \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{1}{2}y^2$

$f'(y) = y$ より求める法線の傾きは $-\frac{1}{f' b}$ である。 ($b \neq 0$ より $f' b \neq 0$)

よって求める法線 L の式は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{f'(b)}(y-b) + f(b) \\ &= -\frac{1}{b}y + \frac{1}{2}b^2 + 1 \end{aligned}$$

(答) $x = -\frac{1}{b}y + \frac{1}{2}b^2 + 1$

(2) (a, b) は C 上にあるので $a = \frac{1}{2}b^2$

(1)でもとめた式に $y=0$ を代入すると

$$x = \frac{1}{2}b^2 + 1 = a + 1$$

よって $Q(a+1, 0)$ となり, $x=0$ を代入すると

$$0 = -\frac{1}{b}y + \frac{1}{2}b^2 + 1 \Leftrightarrow y = (a+1)b$$

よって $R(0, (a+1)b)$ となる。三角形 OQR の面積は

$$\frac{1}{2}(a+1) \times |(a+1)b| = \frac{1}{2}(a+1)^2 |b|$$

$0 < b$ のときを考える。

C, L, y 軸で囲まれた面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^b \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{1}{2}a\{(a+1)b - b\} \\ &= \left[\frac{1}{6}y^3 \right]_0^b + \frac{1}{2}a^2b \\ &= \frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{2}a^2b \\ &= \frac{1}{3}ab + \frac{1}{2}a^2b \end{aligned}$$

$0 > b$ のときも同様に考えるとこの面積は $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \right) |b|$ となる。

これが三角形 OQR の面積の半分になるので

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(a+1)^2 |b| = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \right) |b|$$

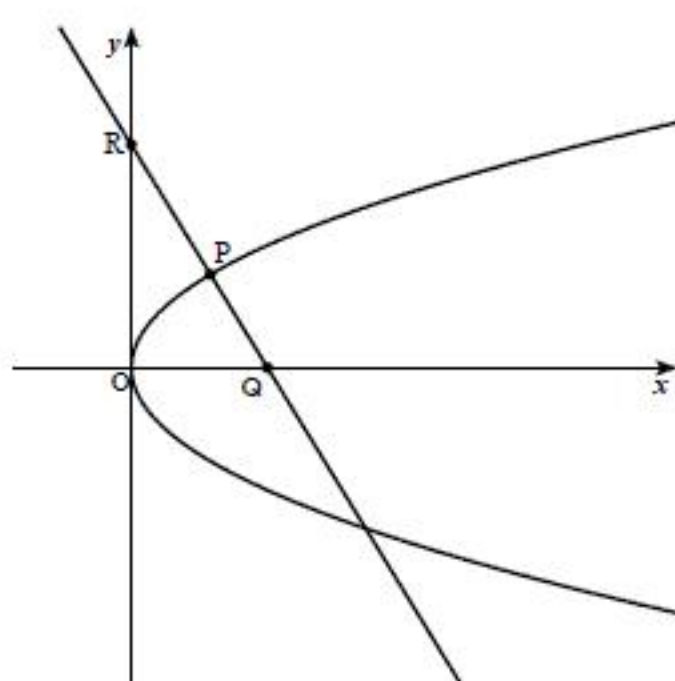
$$\frac{1}{4}(a^2 + 2a + 1) = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \right)$$

$$3a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$a = \frac{1}{2}b^2 > 0 \text{ より, } a = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

(答) $a = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$



(3) $y = \sqrt{2x}$ の逆関数は $y = \frac{1}{2}x^2$

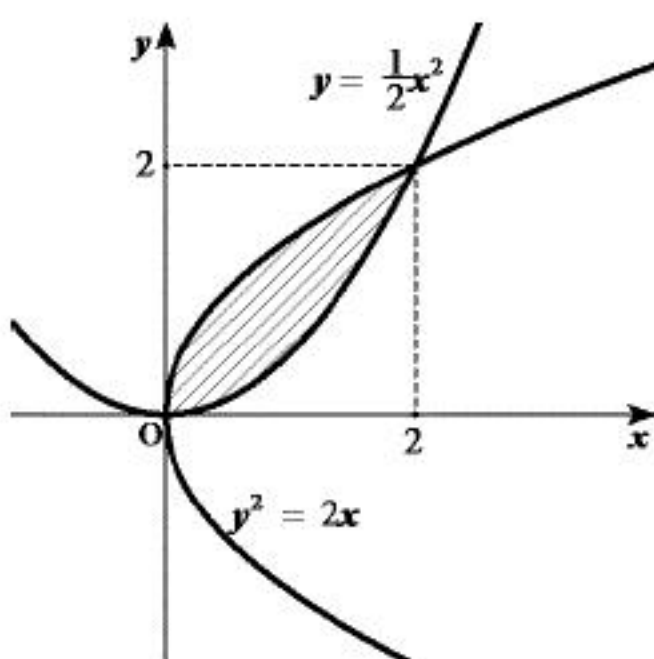
関数 $y = \sqrt{2x}$ とその逆関数の交点は

$$\sqrt{2x} = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = 2,$$

グラフより求める体積は

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left\{ \pi (\sqrt{2x})^2 \right\} dx - \int_0^2 \left\{ \pi \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} dx \\ &= \int_0^2 2\pi x dx - \int_0^2 \frac{1}{4}\pi x^4 dx \\ &= \left[\pi x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{\pi}{20}x^5 \right]_0^2 \\ &= 4\pi - \frac{8}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi \end{aligned}$$

(答) $\frac{12}{5}\pi$



[IV]

$$(1) f' x = -1 \cdot 1-x^{-2} \cdot -1 = 1-x^{-2}$$

$$f'' x = -1 \cdot -2 \cdot 1-x^{-3} \cdot -1^2 = 2! \cdot 1-x^{-3}$$

$$f''' x = -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot 1-x^{-4} \cdot -1^3 = 3! \cdot 1-x^{-4}$$

となることから, $f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)} \dots$ (■) となることが予想される。
これを数学的帰納法により証明する。

$n=1$ のとき (■) は成り立つ。

$n=k$ のとき (■) が成り立つと仮定する。つまり

$$f^{(k)}(x) = k! \cdot (1-x)^{-(k+1)}$$

このとき $n=k+1$ では

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= k! \cdot \{-(k+1)\} \cdot (1-x)^{-(k+2)} \cdot (-1) \\ &= (k+1)! \cdot (1-x)^{-(k+2)} \end{aligned}$$

より (■) が成り立つ。

以上より, 任意の自然数 n について $f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}$ が成り立つ。

$$(\text{答}) f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}$$

(2) $n=1$ のとき, (★) の右辺は

$$\begin{aligned} 1+a+\dots+a^{n-1} + \int_0^a \frac{n(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} dx &= 1 + \int_0^a \frac{1}{(1-x)^2} dx \\ &= 1 + \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^a = 1 + \{(1-a)^{-1} - 1\} \\ &= (1-a)^{-1} = f(a) \end{aligned}$$

より (★) は成り立つ。

$n=k$ で (★), すなわち

$$f(a) = 1+a+\dots+a^{k-1} + \int_0^a \frac{k(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \text{ が成り立つと仮定し,}$$

$n=k+1$ のとき

$$1+a+\dots+a^k + \int_0^a \frac{(k+1)(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx - f(a) = 0 \text{ を示すことで,}$$

$$f(a) = 1+a+\dots+a^k + \int_0^a \frac{(k+1)(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx \text{ が成り立つことを証明する。}$$

$$\begin{aligned} &1+a+\dots+a^k + \int_0^a \frac{(k+1)(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx - f(a) \\ &= \left(1+a+\dots+a^k + \int_0^a \frac{(k+1)(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx \right) - \left(1+a+\dots+a^{k-1} + \int_0^a \frac{k(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \right) \\ &= a^k + \int_0^a \frac{(k+1)(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx - \int_0^a \frac{k(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \\ &= a^k + \int_0^a \left\{ \frac{d}{dx} (1-x)^{-k-1} \times (a-x)^k \right\} dx - \int_0^a \frac{k(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \\ &= a^k + \left[(1-x)^{-k-1} (a-x)^k \right]_0^a - \left\{ \int_0^a \frac{(-k)(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx + \int_0^a \frac{k(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときでも (★) は成り立つ。

以上より, 任意の自然数 n について (★) が成り立つ。 (証明終)

3) (2)より

$$\begin{aligned} R_n(a) &= f(a) - 1 - a - a^2 - \dots - a^{n-1} \\ &= \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^n}{1-a} \\ &= \frac{a^n}{1-a} \end{aligned}$$

$$0 < a < 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0$$

$$(\text{答}) 0$$