

〔 I 〕

$$(1) \quad (\text{与式}) = (2^{\frac{1}{3}})^6 \times \left(\frac{2^4}{3^4} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2^2 \times \frac{3^2}{2^2} = 9 \quad (\text{答}) \quad 9$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \{(x^{\frac{1}{3}})^3 - (y^{\frac{1}{3}})^3\}(x+y) = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2 \quad (\text{答}) \quad x^2 - y^2$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \log_4 (2^{\frac{1}{2}})^4 + \log_4 (2^{-3})^{\frac{1}{2}} - \log_4 (2^3)^{\frac{3}{2}} = \log_4 2^{2-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}} = \log_4 2^{-4} = \log_4 4^{-2} = -2$$

(答) -2

〔Ⅱ〕

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -(1 - \sin^2 2x) - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \\
 &= \sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 1 \\
 &= \left(\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

また、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では $0 \leq \sin 2x \leq 1$ であることから、

$f(x)$ は、 $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0, \pi \Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 1 をとり、

$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

(答) 最大値 1 $\left(x = 0, \frac{\pi}{2} \right)$ 最小値 $\frac{1}{4}$ $\left(x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$

〔Ⅲ〕

$$(1) \quad xe^{-x} = 2xe^{-2x} \Leftrightarrow xe^{-2x}(e^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \log 2$$

よって、交点の座標は $(0, 0), \left(\log 2, \frac{1}{2} \log 2\right)$

$$(\text{答}) \quad (0, 0), \left(\log 2, \frac{1}{2} \log 2\right)$$

$$(2) \quad xe^{-x} - 2xe^{-2x} = xe^{-2x}(e^x - 2)$$

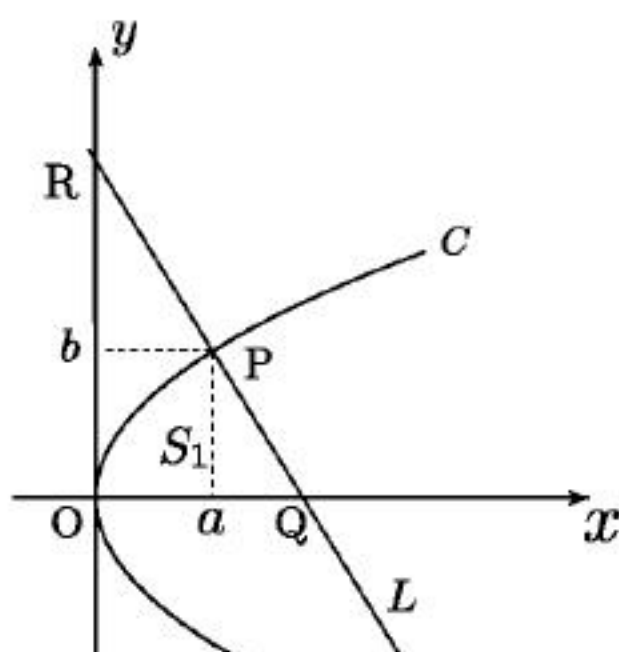
$0 \leq x \leq \log 2$ において、 $xe^{-2x} \geq 0$, $e^x - 2 \leq 0$ なので、 $xe^{-x} - 2xe^{-2x} \leq 0$ である。

よって求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\log 2} (2xe^{-2x} - xe^{-x}) dx \\ &= \int_0^{\log 2} 2xe^{-2x} dx - \int_0^{\log 2} xe^{-x} dx \\ &= \int_0^{\log 2} x(-e^{-2x})' dx - \int_0^{\log 2} x(-e^{-x})' dx \\ &= [-xe^{-2x}]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} e^{-2x} dx + [xe^{-x}]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^{-x} dx \\ &= \left[-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-x} + e^{-x} \right]_0^{\log 2} \\ &= -\frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{8}$$

[IV]



- (1) C の式の両辺を x で微分すると、

$$2y \frac{dy}{dx} = 2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

よって、点 P における接線の傾きは $\frac{1}{b}$ なので L の傾きは $-b$ となる。

よって、法線 L の方程式は $y - b = -b(x - a) \Leftrightarrow y = -bx + b(a + 1)$

(答) $y = -bx + b(a + 1)$

- (2) (1)より、 Q の座標は $(a + 1, 0)$ 、 R の座標は $(0, b(a + 1))$ である。

C が x 軸について対称であることから、 $b > 0$ のときについて考えればよい。

すると、点 P は放物線 C 上にあるので、 $b = \sqrt{2a}$ である。

よって、三角形 OQR の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \times (a + 1) \times b(a + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a} (a + 1)^2$$

また、 C と x 軸および L で囲まれる図形の面積を S_1 とすると、

$$S_1 = \int_0^a \sqrt{2x} \, dx + \frac{1}{2} \times 1 \times b$$

$$= \sqrt{2} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a + \frac{b}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} a\sqrt{a} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a}$$

よって、求める条件は

$$S = 2S_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a} (a + 1)^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} a\sqrt{a} + \sqrt{2} \sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (a + 1)^2 = \frac{4}{3} a + 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$a > 0 \text{ より、} a = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

(答) $a = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$

- (3) $y = \sqrt{2x}$ の逆関数は $y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0)$ である。

よって、2つの関数の交点は、2式を連立させて解いて $(0, 0)$ 、 $(2, 2)$ となる。

これより、求める回転体の体積は、

$$\pi \int_0^2 \left\{ (\sqrt{2x})^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} dx$$

$$= \pi \left[x^2 - \frac{1}{20}x^5 \right]_0^2$$

$$= \frac{12}{5} \pi$$

(答) $\frac{12}{5} \pi$