

【I】

(1)

①に  $y=0$  を代入すると、 $x=8$  である。①に  $x=0$  を代入すると、 $y=16$  である。

よって、①の  $x$  切片の座標は  $(8, 0)$ 、 $y$  切片の座標は  $(0, 16)$  である。

②に  $y=0$  を代入すると、 $x=12$  である。②に  $x=0$  を代入すると、 $y=8$  である。

よって、 $x$  切片の座標は  $(12, 0)$ 、 $y$  切片の座標は  $(0, 8)$  である。

|         |        |           |
|---------|--------|-----------|
| (答) 直線① | $x$ 切片 | $(8, 0)$  |
|         | $y$ 切片 | $(0, 16)$ |
| 直線②     | $x$ 切片 | $(12, 0)$ |
|         | $y$ 切片 | $(0, 8)$  |

(2)

方程式①、②を連立して解くと、

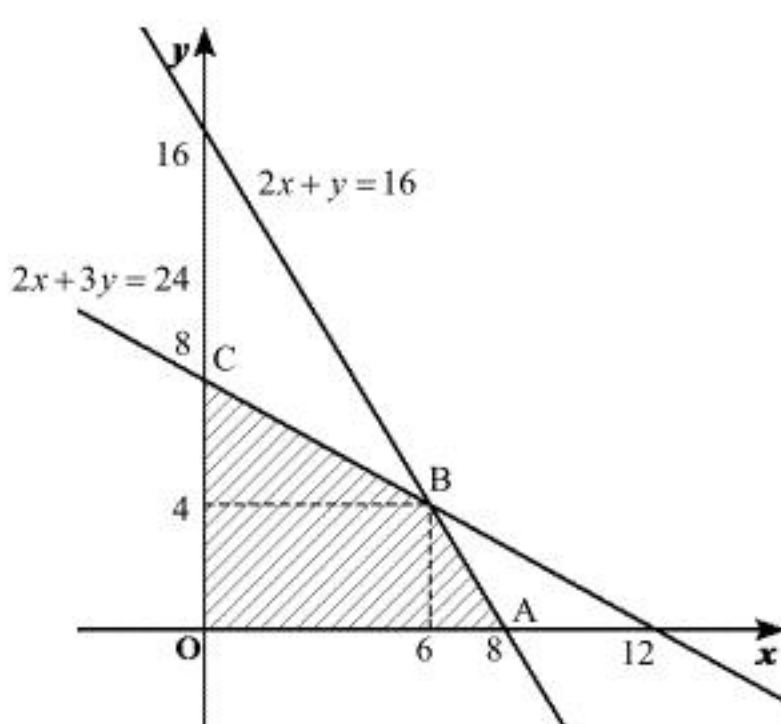
$$x=6, y=4$$

である。よって、交点の座標は点  $(6, 4)$  である。

(答)  $(6, 4)$

(3)

領域  $F$  を図示すると、次図の斜線部のようになる。



ただし、点  $(8, 0)$ 、 $(6, 4)$ 、 $(0, 8)$  をそれぞれ  $A, B, C$  とした。

よって、領域  $F$  の面積を  $S$  とすると、

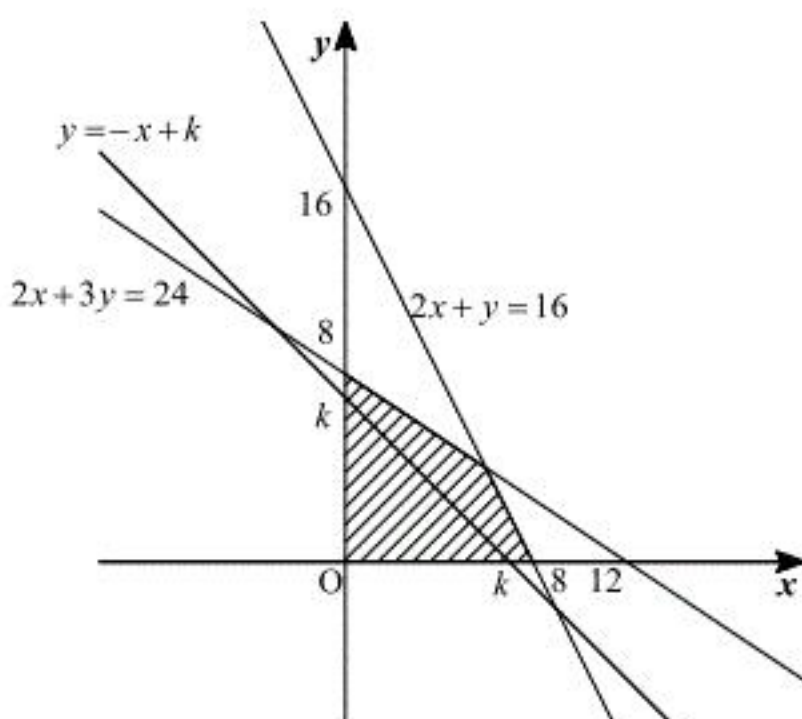
$$\begin{aligned} S &= \triangle OAB + \triangle OBC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \\ &= 40 \end{aligned}$$

となる。

(答) 40

(4)

$x+y=k$  とおくと、 $y=-x+k$  となるが、この直線は傾きが  $-1$ 、 $y$  切片が  $k$  の直線である。



よって、直線  $y=-x+k$  が領域  $F$  を通って、 $y$  切片  $k$  が最大となるのは、この直線が点  $B$  を通るときで、このとき

$$\begin{aligned} k &= 6 + 4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

である。また、直線  $y=-x+k$  が領域  $F$  を通って、 $y$  切片  $k$  が最小となるのは、この直線が原点  $O$  を通るときで、このとき

$$\begin{aligned} k &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

(答) 最大値 10 ( $x=6, y=4$  のとき)  
最小値 0 ( $x=y=0$  のとき)

〔Ⅱ〕

(1)

直線  $\ell$  は、傾きが  $\frac{4}{3}$  で点  $A(3, 2)$  を通る直線なので、その方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}(x-3)+2 \\ &= \frac{4}{3}x-2 \end{aligned}$$

である。

(答)  $y = \frac{4}{3}x - 2$

(2)

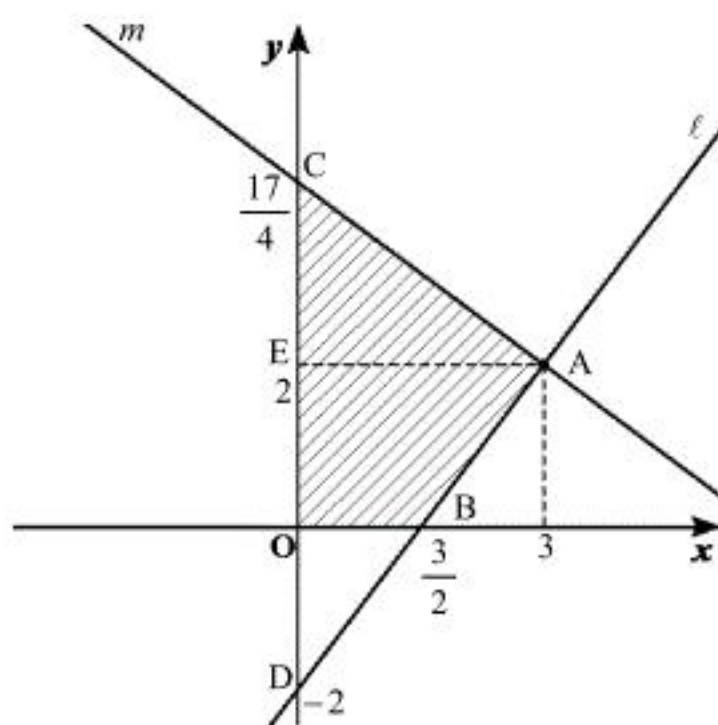
直線  $m$  は、直線  $\ell$  の法線なので、その傾きは  $-\frac{3}{4}$  である。また、直線  $m$  は点  $A(3, 2)$  を通るので、直線  $m$  の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{4}(x-3)+2 \\ &= -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

である。

(答)  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$

(3)



直線  $\ell$  の方程式に  $y=0$  を代入することで、点  $B$  の座標は  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  とわかる。

直線  $m$  の方程式に  $x=0$  を代入することで、点  $C$  の座標は  $\left(0, \frac{17}{4}\right)$  とわかる。

よって、グラフを図示すると前図のようになる。ただし、斜線部は  $y$  軸のまわりに回転させる部分である。また、点  $(0, -2)$ 、 $(0, 2)$  をそれぞれ点  $D$ 、 $E$  とした。ここで、三角形  $CAE$ 、三角形  $DAE$ 、三角形  $DBO$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ  $V_1$ 、 $V_2$ 、 $V_3$  とすれば、求める立体の体積は、

$$V_1 + (V_2 - V_3)$$

である。したがって、求める体積は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot 3^2 \pi \cdot \left( \frac{17}{4} - 2 \right) + \left[ \frac{1}{3} \cdot 3^2 \pi \cdot \{ 2 - (-2) \} - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^2 \pi \cdot 2 \right] \\ &= \frac{27}{4} \pi + \left( 12\pi - \frac{3}{2} \pi \right) \\ &= \frac{69}{4} \pi \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{69}{4} \pi$

### 【Ⅲ】

(1)

(a)

B 君を車から降ろした地点を M, C 君を車に乗せた地点を N とする。このとき,  $v > p$  より,  $PM > PN$  である。PM, MQ の距離をそれぞれ  $x, y$  とすると, B 君及び C 君の移動した距離は  $x + y$  である。B 君と C 君が, P 地点から Q 地点への移動にかかった時間は等しいので, B 君が歩いた距離と, C 君が歩いた距離は等しい。すなわち,

$$PN = MQ = y$$

である。よって A 君の移動した距離は,

$$\begin{aligned} PM + 2MN + MQ &= x + 2(x - y) + y \\ &= 3x - y \end{aligned}$$

なので, A 君が地点 P を出発してから地点 Q に着くまでの所要時間は  $\frac{3x - y}{v}$  であり,

平均速度は,

$$\frac{\frac{x + y}{\frac{3x - y}{v}}}{v} = \frac{x + y}{3x - y} v \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また A 君が P から M を経由して N まで戻る時間と, C 君が P から N まで歩く時間が等しいので,

$$\begin{aligned} \frac{x + (x - y)}{v} &= \frac{y}{p} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2p}{v + p} x \end{aligned}$$

である。これを①に代入すると, 平均速度は,

$$\frac{x + \frac{2p}{v + p} x}{3x - \frac{2p}{v + p} x} v = \frac{v(v + 3p)}{3v + p}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{v(v + 3p)}{3v + p}$$

(b)

A 君が一人で車に乗っていた時間は, 地点 M で B 君を降ろしてから地点 N で C 君を乗せるまでの時間  $\frac{x - y}{v}$  なので, 求める割合は,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x - y}{v}}{\frac{3x - y}{v}} &= \frac{x - \frac{2p}{v + p} x}{3x - \frac{2p}{v + p} x} \quad \left( \because y = \frac{2p}{v + p} x \right) \\ &= \frac{v - p}{3v + p} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{v - p}{3v + p}$$

(2)

(a)

(1)と同様に考える。B<sub>1</sub> 君, B<sub>2</sub> 君, ..., B<sub>n-1</sub> 君を車から降ろした地点を M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, ..., M<sub>n-1</sub> とし, B<sub>2</sub> 君, B<sub>3</sub> 君, ..., B<sub>n</sub> 君を車に乗せた地点を N<sub>2</sub>, N<sub>3</sub>, ..., N<sub>n</sub> とし,

$$PM_1 = N_2M_2 = N_3M_3 = \cdots = N_{n-1}M_{n-1} = N_nQ = x,$$

とおく。B<sub>1</sub> 君, B<sub>2</sub> 君, ..., B<sub>n</sub> 君が歩いた距離を  $y$  とする。B<sub>1</sub> 君, B<sub>2</sub> 君, ..., B<sub>n</sub> 君がそれぞれ車に乗る地点は均等であるはずで, また, PN<sub>n</sub> は B<sub>n</sub> 君が歩いた距離ゆえに PN<sub>n</sub> =  $y$  なので,

$$PN_2 = N_2N_3 = N_3N_4 = \cdots = N_{n-1}N_n = \frac{y}{n - 1}$$

である。よって A 君の移動した距離は,  $n \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} PM_1 + M_1N_2 + N_2M_2 + M_2N_3 + \cdots + N_{n-1}M_{n-1} + M_{n-1}N_n + N_nQ \\ &= PM_1 + \sum_{k=1}^{n-1} M_kN_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-2} N_{k+1}M_{k+1} + N_nQ \\ &= x + \left( x - \frac{y}{n-1} \right) \cdot (n-1) + x \cdot (n-2) + x \\ &= (2n-1)x - y \end{aligned}$$

であり, これは(1)の結果より  $n = 2$  の場合も含む。また, 所要時間は  $\frac{(2n-1)x - y}{v}$  であり, 平均速度は,

$$\frac{\frac{x + y}{\frac{(2n-1)x - y}{v}}}{v} = \frac{x + y}{(2n-1)x - y} v \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。A 君が P から M<sub>1</sub> を経由して N<sub>2</sub> まで戻る時間と, B 君が P から N<sub>2</sub> まで歩く時間が等しいので,

$$\begin{aligned} \frac{x + \left( x - \frac{y}{n-1} \right)}{v} &= \frac{\frac{y}{n-1}}{p} \\ \Leftrightarrow \frac{2(n-1)x - y}{v} &= \frac{y}{p} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2p(n-1)}{v + p} x \end{aligned}$$

であり, これを②に代入すると, 平均速度は,

$$\frac{x + \frac{2p(n-1)}{v + p} x}{(2n-1)x - \frac{2p(n-1)}{v + p} x} v = \frac{v\{v + (2n-1)p\}}{(2n-1)v + p}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{v\{v + (2n-1)p\}}{(2n-1)v + p}$$

(b)

A 君が一人で車に乗っていた時間は,

$$\begin{aligned} \frac{M_1N_2 + M_2N_3 + \cdots + M_{n-1}N_n}{v} &= \frac{\left( x - \frac{y}{n-1} \right) \times (n-1)}{v} \\ &= \frac{(n-1)x - y}{v} \end{aligned}$$

なので, 求める割合は,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(n-1)x - y}{v}}{\frac{(2n-1)x - y}{v}} &= \frac{(n-1)x - \frac{2p(n-1)}{v + p} x}{(2n-1)x - \frac{2p(n-1)}{v + p} x} \quad \left( \because y = \frac{2p(n-1)}{v + p} x \right) \\ &= \frac{(n-1)(v - p)}{(2n-1)v + p} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{(n-1)(v - p)}{(2n-1)v + p}$$

## 〔Ⅳ〕

(1)

正五角形の内角の和は、

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

なので、一つの内角は、

$$540^\circ \div 5 = 108^\circ$$

である。三角形 ADE は  $AE = DE$  の二等辺三角形なので、

$$\angle ADE = \angle DAE = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

であり、

$$\angle ADC = \angle CDE - \angle ADE = 180^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

である。ここで、 $\angle BCD = 108^\circ$  なので、

$$\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$$

となる。したがって、BC と AD は平行である。

(証明終)

(2)

正五角形の対称性を考慮すると、(1)の結果から、

$$AF \parallel DE, AE \parallel DF$$

であるので、四角形 AFDE は平行四辺形である。また、AE、DE は正五角形の一辺なので、

$$AE = DE$$

である。したがって、四角形 AFDE はひし形である。

(答) ひし形

(3)

$CF = x$  とおくと、

$$AC = AD = 1 + x$$

(1)より、 $BC \parallel AD$  でありこれより、 $\triangle DAF \sim \triangle BCF$  なので、

$$AF : FC = AD : CB$$

$$1 : x = (1 + x) : 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

である。よって、

$$AF : CF = 1 : \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。

$$(答) AF : CF = 1 : \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

(4)

$BC \parallel AD$ ,  $|\vec{b}| = 1$  と  $AD = 1 + x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  から、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\vec{a} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b}$$