

〔I〕

(1)

正五角形の内角の和は,

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

なので, 一つの内角は,

$$540^\circ \div 5 = 108^\circ$$

である。三角形 ADE は $AE = DE$ の二等辺三角形なので,

$$\angle ADE = \angle DAE = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

であり,

$$\angle ADC = \angle CDE - \angle ADE = 180^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

である。ここで, $\angle BCD = 108^\circ$ なので,

$$\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$$

となる。したがって, BC と AD は平行である。

(証明終)

(2)

正五角形の対称性を考慮すると, (1)の結果から,

$$AF \parallel DE, AE \parallel DF$$

であるので, 四角形 AFDE は平行四辺形である。また, AE, DE は正五角形の一辺なので,

$$AE = DE$$

である。したがって, 四角形 AFDE はひし形である。

(答) ひし形

(3)

$CF = x$ とおくと,

$$AC = AD = 1 + x$$

(1)より $\triangle BCF \sim \triangle DAF$ なので,

$$1 : x = (1 + x) : 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

である。よって,

$$AC = AD = 1 + x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。よって, $BC \parallel AD$ と $|\vec{b}| = 1$ から,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\vec{a} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x)^n + nx(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\log x)^n + n(\log x)^{n-1} \end{aligned}$$

(答) $f'(x) = (\log x)^n + n(\log x)^{n-1}$

(2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x \, dx \\ &= [x \log x - x]_1^e \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(答) $I_1 = 1$

(3)

(1)の結果より,

$$\frac{d}{dx} x(\log x)^n = (\log x)^n + n(\log x)^{n-1}$$

であるが、この式の n を $n+1$ に置き換えると,

$$\frac{d}{dx} x(\log x)^{n+1} = (\log x)^{n+1} + (n+1)(\log x)^n$$

である。この式の両辺を $x=1$ から $x=e$ まで積分すると,

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{d}{dx} x(\log x)^{n+1} \, dx &= \int_1^e \{ (\log x)^{n+1} + (n+1)(\log x)^n \} \, dx \\ \Leftrightarrow [x(\log x)^{n+1}]_1^e &= \int_1^e (\log x)^{n+1} \, dx + (n+1) \int_1^e (\log x)^n \, dx \\ \Leftrightarrow e &= I_{n+1} + (n+1)I_n \\ \Leftrightarrow I_{n+1} &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

〔別解〕直接求める。

(3)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} \, dx \\ &= [x(\log x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e x(\log x)^n \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

(答) $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

(4)

(3)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} I_4 &= e - 4I_3 \\ &= e - 4(e - 3I_2) \\ &= -3e + 12(e - 2I_1) \\ &= 9e - 24 \quad (\because I_1 = 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $I_4 = 9e - 24$

【Ⅲ】

(1)

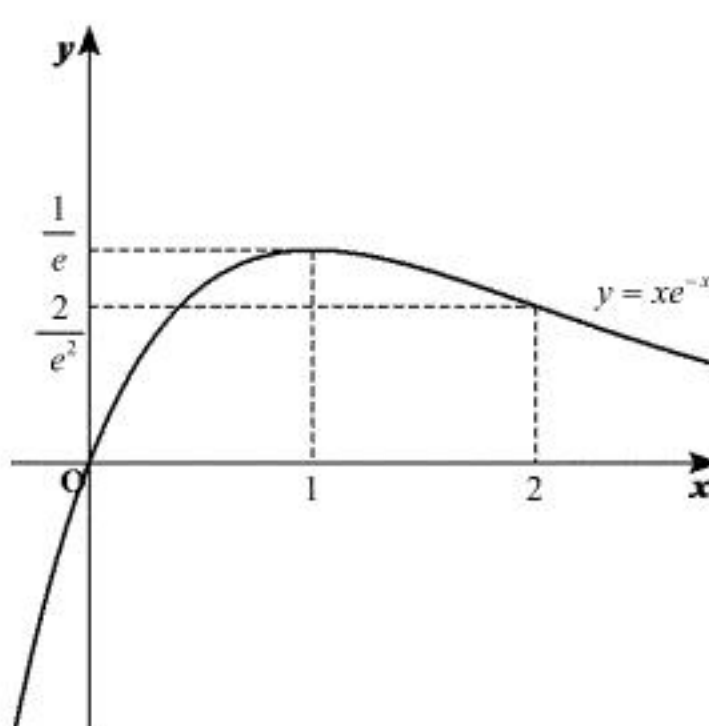
$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\&= (1-x)e^{-x} \\f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\&= (x-2)e^{-x}\end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ の増減・凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

よって、 $x=1$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。変曲点は点 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ である。

また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ より、 $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



(答) 極大値 $\frac{1}{e}$
変曲点 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$
グラフ 前図

(2)

曲線 $y = f(x)$ 上の接点の x 座標を t とすると、接線の式は、

$$\begin{aligned}y &= f'(x)(x-t) + f'(t) \\&= (1-t)e^{-t}x + t^2e^{-t}\end{aligned}$$

となる。この接線が点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るので、

$$\begin{aligned}0 &= (1-t)e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\right) + t^2e^{-t} \\&\Leftrightarrow e^{-t}(2t^2 + t - 1) = 0 \\&\Leftrightarrow e^{-t}(2t-1)(t+1) = 0\end{aligned}$$

より、 $e^{-t} > 0$ なので、 $t = \frac{1}{2}, -1$ である。

実数 t が 2 つ存在するので、曲線 $y = f(x)$ の接線で、点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るものは 2 本存在し、

接線の方程式は、

$$\begin{aligned}t = \frac{1}{2} \text{ のとき, } y &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}} \\t = -1 \text{ のとき, } y &= 2ex + e\end{aligned}$$

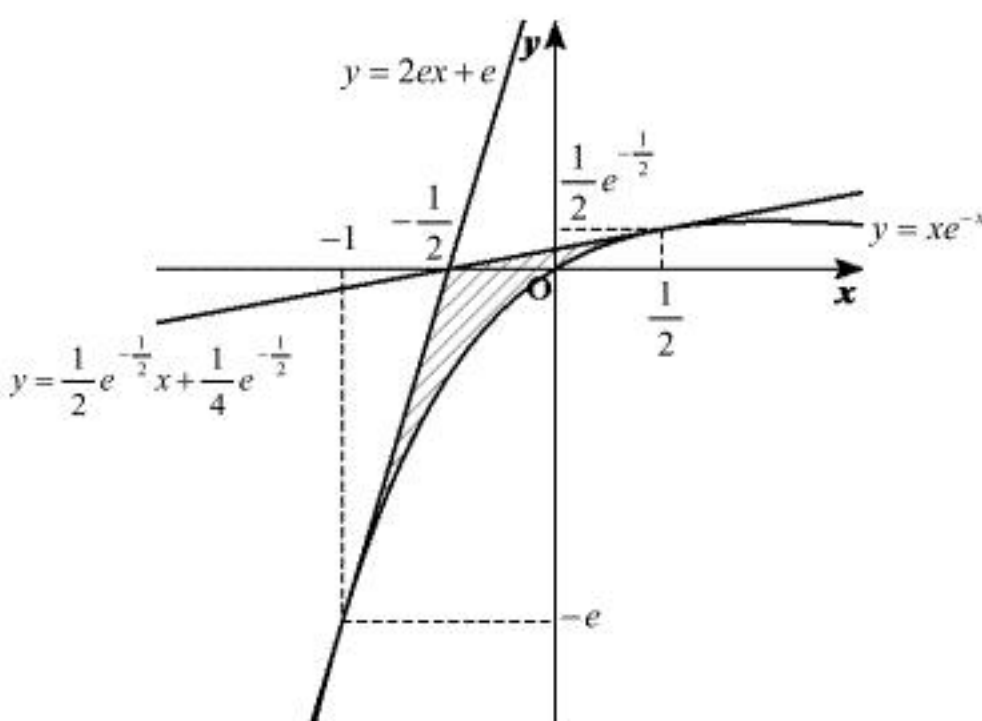
となる。

(答) $y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$
 $y = 2ex + e$

(3)

曲線 $y = f(x)$ と (2) で求めた 2 接線を図示すると次図である。

ただし、斜線部は面積を求める部分である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \{(2ex + e) - xe^{-x}\} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}} \right) - xe^{-x} \right\} dx \\&= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2ex + e) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}} \right) dx - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} xe^{-x} dx \\&= [ex^2 + ex]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}x^2 + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}x \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \left\{ [-xe^{-x}]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \right\} \\&= \frac{7}{4}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}e\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{7}{4}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}e$

〔Ⅳ〕

(1)

$f(x) = x - (a + k \sin x)$ とおくと、

$$f'(x) = 1 - k \cos x$$

であり、 $0 < k < 1$ 、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ より、 $-1 < k \cos x < 1$ なので $f'(x) > 0$ となり、 $f(x)$ は単調増加する。このことと、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

より、 $f(x) = 0$ はただ一つの実数解をもつ。すなわち、方程式 $x = a + k \sin x$ はただ一つの実数解をもつ。

(証明終)

(2)

次の[1], [2]の場合に分けて考える。

[1] $|\theta| \geq 1$, [2] $|\theta| < 1$

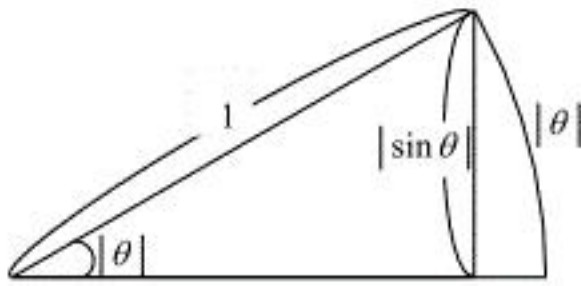
[1] $|\theta| \geq 1$ のとき

$-1 \leq \sin x \leq 1$ なので、与えられた不等式 $|\sin \theta| \leq |\theta|$ が成り立つ。

[2] $|\theta| < 1$ のとき

このとき、 $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$ である。 $|\theta|$ を一つの角、斜辺の長さが 1 である直角三角形と、中

心角 $|\theta|$ で半径 1 の扇形を考える。それを次図に示す。



このとき、直角三角形のもう一边の長さは $\sin |\theta| = |\sin \theta|$ である。また、扇形の曲線部分の長さは $|\theta|$ である。したがって前図より、不等式 $|\sin \theta| \leq |\theta|$ が成り立つ。

[1], [2] よりすべての実数 θ に対して不等式 $|\sin \theta| \leq |\theta|$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} |\sin \alpha - \sin \beta| &= \left| 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \\ &\leq \left| 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \quad (\because -1 \leq \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 1) \\ &\leq 2 \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \quad (\because (2)) \\ &= |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

よって、すべての実数 α, β について不等式 $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$ が成り立つ。

(証明終)

〔別解〕

(3)

$\alpha = \beta$ のとき、 $|\sin \alpha - \sin \beta| = |\alpha - \beta| = 0$ なので、不等式 $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$ は成り立つ。

$\alpha \neq \beta$ のとき、 $g(x) = \sin x$ とおくと、平均値の定理より、

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} = g'(c) = \cos c \quad (c \text{ は } \alpha \text{ と } \beta \text{ の間にある実数})$$

となる c が存在する。 $-1 \leq \cos c \leq 1$ なので、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} \right| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow |\sin \alpha - \sin \beta| &\leq |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上より、不等式 $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$ が成り立つ。

(証明終)

※(2)も同様の方法で証明できる。

(4)

(1)の方程式の解を $x = t$ とする。 x_n と t の差 $|x_n - t|$ を考えると、

$$\begin{aligned} |x_n - t| &= |(a + k \sin x_n) - (a + k \sin t)| \\ &= k |\sin x_n - \sin t| \quad (\because 0 < k < 1) \\ &\leq k |x_{n-1} - t| \quad (\because (3)) \\ &\vdots \\ &\leq k^n |t| \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq |x_n - t| \leq k^n |t|$ である。 $0 < k < 1$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n |t| = 0$$

なので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - t| = 0$$

となる。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = t$$

であり、数列 $\{x_n\}$ は方程式 $x = a + k \sin x$ の解に収束する。

(証明終)