

【I】

(1)

①に  $y=0$  を代入すると、 $x=8$  である。①に  $x=0$  を代入すると、 $y=16$  である。

よって、①の  $x$  切片の座標は  $(8, 0)$ 、 $y$  切片の座標は  $(0, 16)$  である。

②に  $y=0$  を代入すると、 $x=12$  である。②に  $x=0$  を代入すると、 $y=8$  である。

よって、 $x$  切片の座標は  $(12, 0)$ 、 $y$  切片の座標は  $(0, 8)$  である。

|         |        |           |
|---------|--------|-----------|
| (答) 直線① | $x$ 切片 | $(8, 0)$  |
|         | $y$ 切片 | $(0, 16)$ |
| 直線②     | $x$ 切片 | $(12, 0)$ |
|         | $y$ 切片 | $(0, 8)$  |

(2)

方程式①、②を連立して解くと、

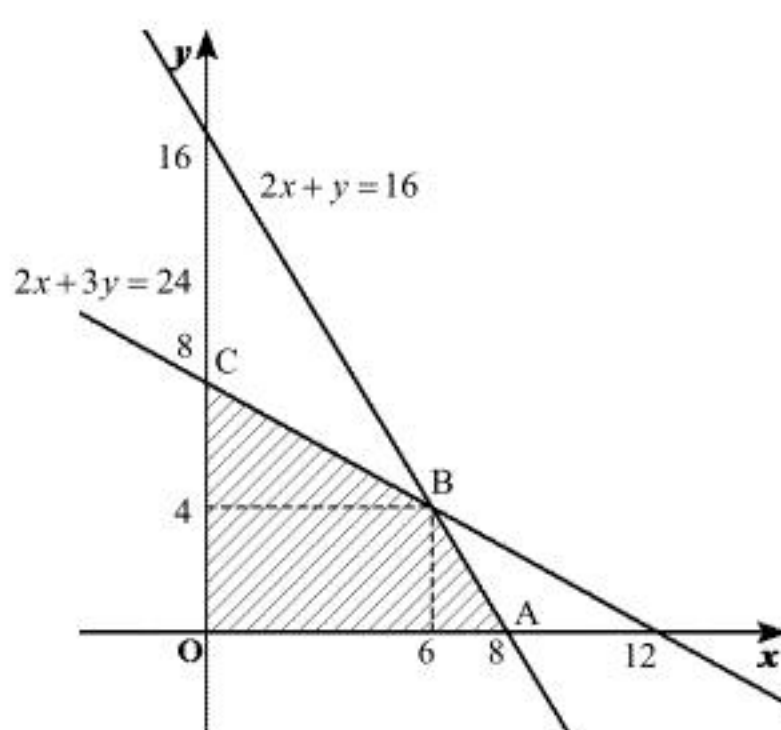
$$x=6, y=4$$

である。よって、交点の座標は点  $(6, 4)$  である。

(答)  $(6, 4)$

(3)

領域  $F$  を図示すると、次図の斜線部のようになる。



ただし、点  $(8, 0)$ 、 $(6, 4)$ 、 $(0, 8)$  をそれぞれ A, B, C とした。

よって、領域  $F$  の面積を  $S$  とすると、

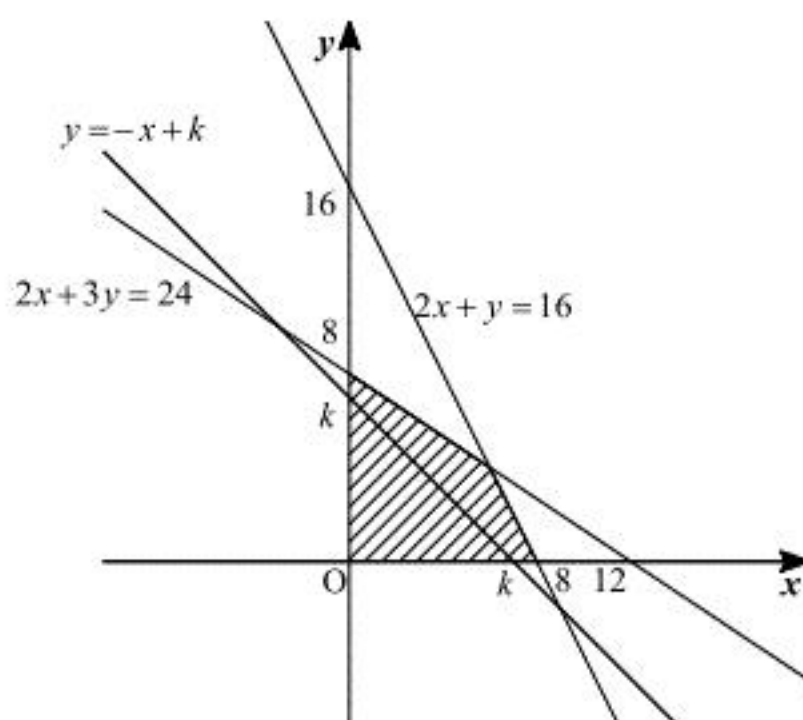
$$\begin{aligned} S &= \triangle OAB + \triangle OBC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \\ &= 40 \end{aligned}$$

となる。

(答) 40

(4)

$x+y=k$  とおくと、 $y=-x+k$  となるが、この直線は傾きが  $-1$ 、 $y$  切片が  $k$  の直線である。



よって、直線  $y=-x+k$  が領域  $F$  を通って、 $y$  切片  $k$  が最大となるのは、この直線が点 B を通るときで、このとき

$$\begin{aligned} k &= 6+4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

である。また、直線  $y=-x+k$  が領域  $F$  を通って、 $y$  切片  $k$  が最小となるのは、この直線が原点 O を通るときで、このとき

$$\begin{aligned} k &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

(答) 最大値 10 ( $x=6, y=4$  のとき)  
最小値 0 ( $x=y=0$  のとき)

## 〔Ⅱ〕

(1)

正五角形の内角の和は、

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

なので、一つの内角は、

$$540^\circ \div 5 = 108^\circ$$

である。三角形 ADE は  $AE = DE$  の二等辺三角形なので、

$$\angle ADE = \angle DAE = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

であり、

$$\angle ADC = \angle CDE - \angle ADE = 180^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

である。ここで、 $\angle BCD = 108^\circ$  なので、

$$\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$$

となる。したがって、BC と AD は平行である。

(証明終)

(2)

正五角形の対称性を考慮すると、(1)の結果から、

$$AF \parallel DE, AE \parallel DF$$

であるので、四角形 AFDE は平行四辺形である。また、AE、DE は正五角形の一辺なので、

$$AE = DE$$

である。したがって、四角形 AFDE はひし形である。

(答) ひし形

(3)

$CF = x$  とおくと、

$$AC = AD = 1 + x$$

(1)より、 $BC \parallel AD$  でありこれより、 $\triangle DAF \sim \triangle BCF$  なので、

$$AF : FC = AD : CB$$

$$1 : x = (1 + x) : 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

である。よって、

$$AF : CF = 1 : \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。

$$(答) \quad AF : CF = 1 : \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

(4)

$$BC \parallel AD, \quad |\vec{b}| = 1 \text{ と } AD = 1 + x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ から,}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\vec{a} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vec{b}$$

### 〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x)^n + nx(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\log x)^n + n(\log x)^{n-1} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad f'(x) = (\log x)^n + n(\log x)^{n-1}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x \, dx \\ &= [x \log x - x]_1^e \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad I_1 = 1$$

(3)

(1)の結果より,

$$\frac{d}{dx} x(\log x)^n = (\log x)^n + n(\log x)^{n-1}$$

であるが, この式の  $n$  を  $n+1$  に置き換えると,

$$\frac{d}{dx} x(\log x)^{n+1} = (\log x)^{n+1} + (n+1)(\log x)^n$$

である。この式の両辺を  $x=1$  から  $x=e$  まで積分すると,

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{d}{dx} x(\log x)^{n+1} \, dx &= \int_1^e \left\{ (\log x)^{n+1} + (n+1)(\log x)^n \right\} dx \\ \Leftrightarrow [x(\log x)^{n+1}]_1^e &= \int_1^e (\log x)^{n+1} \, dx + (n+1) \int_1^e (\log x)^n \, dx \\ \Leftrightarrow e &= I_{n+1} + (n+1)I_n \\ \Leftrightarrow I_{n+1} &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

〔別解〕 直接求める。

(3)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} \, dx \\ &= \left[ x(\log x)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e x(\log x)^n \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

(4)

(3)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} I_4 &= e - 4I_3 \\ &= e - 4(e - 3I_2) \\ &= -3e + 12(e - 2I_1) \\ &= 9e - 24 \quad (\because I_1 = 1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_4 = 9e - 24$$

〔Ⅳ〕

(1)

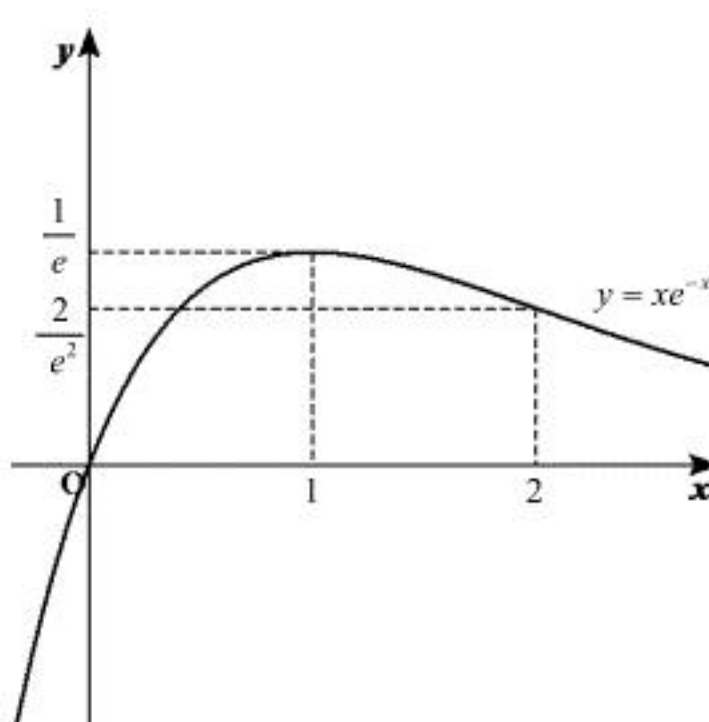
$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \\ f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\ &= (x-2)e^{-x}\end{aligned}$$

よって、 $f(x)$  の増減・凹凸は次の表のようになる。

|          |     |               |     |                 |     |
|----------|-----|---------------|-----|-----------------|-----|
| $x$      | ... | 1             | ... | 2               | ... |
| $f'(x)$  | +   | 0             | -   | -               | -   |
| $f''(x)$ | -   | -             | -   | 0               | +   |
| $f(x)$   | ↗   | $\frac{1}{e}$ | ↘   | $\frac{2}{e^2}$ | ↘   |

よって、 $x=1$  のとき極大値  $\frac{1}{e}$  をとる。変曲点は点  $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$  である。

また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  より、 $y = f(x)$  のグラフは次のようになる。



(答) 極大値  $\frac{1}{e}$   
変曲点  $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$   
グラフ 前図

(2)

曲線  $y = f(x)$  上の接点の  $x$  座標を  $t$  とすると、接線の式は、

$$\begin{aligned}y &= f'(x)(x-t) + f'(t) \\ &= (1-t)e^{-t}x + t^2e^{-t}\end{aligned}$$

となる。この接線が点  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  を通るので、

$$\begin{aligned}0 &= (1-t)e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\right) + t^2e^{-t} \\ \Leftrightarrow e^{-t}(2t^2 + t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-t}(2t-1)(t+1) &= 0\end{aligned}$$

より、 $e^{-t} > 0$  なので、 $t = \frac{1}{2}, -1$  である。

実数  $t$  が 2 つ存在するので、曲線  $y = f(x)$  の接線で、点  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  を通るものは 2 本存在し、

接線の方程式は、

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき、 } y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$t = -1 \text{ のとき、 } y = 2ex + e$$

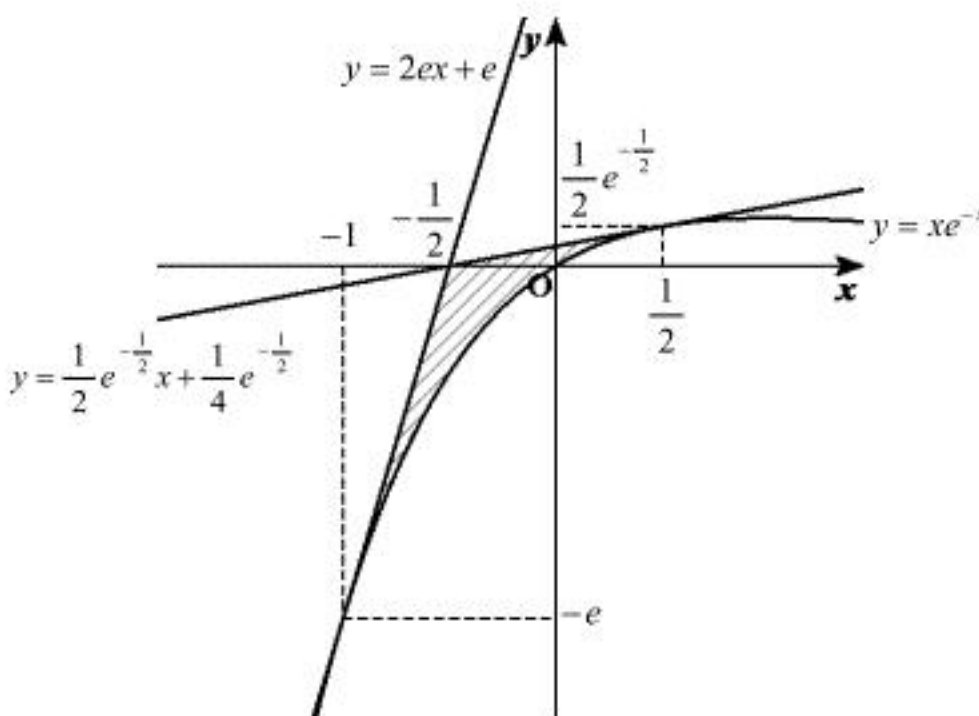
となる。

(答)  $y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$   
 $y = 2ex + e$

(3)

曲線  $y = f(x)$  と (2) で求めた 2 接線を図示すると次図である。

ただし、斜線部は面積を求める部分である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned}& \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left\{ (2ex + e) - xe^{-x} \right\} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left( \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}} \right) - xe^{-x} \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2ex + e) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}} \right) dx - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} xe^{-x} dx \\ &= \left[ ex^2 + ex \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}x^2 + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}x \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \left\{ \left[ -xe^{-x} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \right\} \\ &= \frac{7}{4}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}e\end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{7}{4}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}e$