

【I】

(1)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

であるから、 $x + \frac{1}{x} = a$ とおくとき

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

(2)

$x > 1$ であるから

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であり、等号成立は

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

のときとなるが、 $x > 1$ であることよりこれを満たさない。よって

$$a = x + \frac{1}{x} > 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \\ &= a^2 - 2 - 2 \\ &= a^2 - 4 \end{aligned}$$

であり、①、②より

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$$

(3)

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

となるから、(1)、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{x^3} &= \sqrt{a^2 - 4} (a^2 - 2 + 1) \\ &= (a^2 - 1) \sqrt{a^2 - 4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = (a^2 - 1) \sqrt{a^2 - 4}$$

【II】

(1)

点 $A(2, 8)$, $B(7, 7)$ は、円 $C_1: x^2 + y^2 + ax + by + 28 = 0$ の円周上にあるから

$$\begin{cases} 2^2 + 8^2 + 2a + 8b + 28 = 0 \\ 7^2 + 7^2 + 7a + 7b + 28 = 0 \end{cases}$$

を満たす。これを a, b について解くと

$$a = -8, b = -10$$

となる。よって、円 C_1 の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + y^2 - 10y + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 &= 13 \end{aligned}$$

となり、この円の中心の座標は $(4, 5)$ で、半径は $\sqrt{13}$ である。

(答) 中心の座標 $(4, 5)$, 半径 $\sqrt{13}$

(2)

円 C_1 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1 - 4)(x - 4) + (y_1 - 5)(y - 5) = 13$$

と表される。したがって、円 C_1 上の点 A における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} -2(x - 4) + 3(y - 5) &= 13 \\ \Leftrightarrow -2x + 3y &= 20 \end{aligned}$$

となり、円 C_1 上の点 B における接線 m の方程式は

$$\begin{aligned} 3(x - 4) + 2(y - 5) &= 13 \\ \Leftrightarrow 3x + 2y &= 35 \end{aligned}$$

となる。よって、2 直線 l, m の交点の座標

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 3y = 20 \\ 3x + 2y = 35 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (5, 10) \end{aligned}$$

である。

(答) $(5, 10)$

(3)

放物線 C_2 の頂点が $(5, 10)$ であることから、実数 c ($c \neq 0$) を用いて

$$y = c(x - 5)^2 + 10$$

と表される。これが点 A を通るとき

$$\begin{aligned} 8 &= c \cdot (2 - 5)^2 + 10 \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。したがって、放物線 C_2 の方程式は

$$y = -\frac{2}{9}(x - 5)^2 + 10$$

となり、 C_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{9}(x - 5)^2 + 10 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 &= 45 \\ \Leftrightarrow x - 5 &= \pm 3\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x &= 5 \pm 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。以上より、求める交点の座標は

$$(5 - 3\sqrt{5}, 0), (5 + 3\sqrt{5}, 0)$$

である。

(答) $(5 - 3\sqrt{5}, 0), (5 + 3\sqrt{5}, 0)$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}2^x &= 8^{y+1} \\ \Leftrightarrow 2^x &= 2^{3(y+1)} \\ \Leftrightarrow x &= 3(y+1) \qquad \qquad \qquad \dots \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}9^y &= 3^{x-9} \\ \Leftrightarrow 3^{2y} &= 3^{x-9} \\ \Leftrightarrow 2y &= x-9 \qquad \qquad \qquad \dots \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

であるから、 $2^x = 8^{y+1}$ 、 $9^y = 3^{x-9}$ を満たすとき、①、②より

$$(x, y) = (21, 6)$$

となり

$$x+y=27$$

である。

(答) $x+y=27$

(2)

$$\begin{aligned}x^2 - px + \frac{p^2-1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4px + (p^2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{2x-(p+1)\}\{2x-(p-1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}(p \pm 1)\end{aligned}$$

であるから、 $x^2 - px + \frac{p^2-1}{4} = 0$ の 2 つの解を x_1, x_2 とするとき、 $\frac{1}{2}(p+1) > \frac{1}{2}(p-1)$ より

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| &= \frac{1}{2}(p+1) - \frac{1}{2}(p-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $|x_1 - x_2| = 1$

(3)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} &= 3 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9}\right)^3 &= 3^3 \\ \Leftrightarrow (x+9) - 3\left(\sqrt[3]{x+9}\right)^2 \sqrt[3]{x-9} + 3\sqrt[3]{x+9}\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2 - (x-9) &= 27 \\ \Leftrightarrow -\left(\sqrt[3]{x+9}\right)^2 \sqrt[3]{x-9} + \sqrt[3]{x+9}\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+9}\sqrt[3]{x-9}\left(\sqrt[3]{x-9} - \sqrt[3]{x+9}\right) &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+9}\sqrt[3]{x-9} &= -1 \\ \Leftrightarrow (x+9)(x-9) &= (-1)^3 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 80\end{aligned}$$

である。

(答) $x^2 = 80$

[IV]

(1)

5 個の「 $\swarrow$ 」と 5 個の「 $\searrow$ 」の計 10 個の矢印を並べて、順番に矢印の通りに移動すると、北隅の A の文字から南隅の A の文字まで最短で進むことができる。よって、北隅の A から南隅の A までの最短の進み方の場合の数は、5 個の「 $\swarrow$ 」と 5 個の「 $\searrow$ 」の計 10 個の矢印の並べ方の場合の数に等しいから

$${}_{10}C_5 = 252 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 252 通り

(2)

(1)と同様に考えると、北隅の A から T 地点までの最短の進み方は

$${}_3C_2 = 3 \text{ 通り}$$

であり、T 地点から南隅の A までの最短の進み方は

$${}_7C_3 = 35 \text{ 通り}$$

である。したがって、T 地点を通る ABRACADABRA の読み方は

$$3 \cdot 35 = 105 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 105 通り

(3)

(1)と同様に考えると、北隅の A から T 地点までの最短の進み方は 3 通りあり、T 地点から U 地点までの最短の進み方は

$${}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

である。さらに、U 地点から南隅の A までの最短の進み方は

$${}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

である。よって、T 地点と U 地点の両方を通る ABRACADABRA の読み方は

$$3 \cdot 3 \cdot 6 = 54 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 54 通り

(4)

(1)と同様に考えると、U 地点を通る ABRACADABRA の読み方は

$${}_6C_3 \cdot {}_4C_2 = 120 \text{ 通り}$$

である。したがって、(2), (3)の結果を用いて、T 地点または U 地点の少なくとも一方を通る ABRACADABRA の読み方は

$$105 + 120 - 54 = 171 \text{ 通り}$$

ある。以上より、T 地点と U 地点のどちらも通らない ABRACADABRA の読み方は

$$252 - 171 = 81 \text{ 通り}$$

となる。

(答) 81 通り