

〔I〕

(1)

点 $A(2, 8)$, $B(7, 7)$ は、円 $C_1: x^2 + y^2 + ax + by + 28 = 0$ の円周上にあるから

$$\begin{cases} 2^2 + 8^2 + 2a + 8b + 28 = 0 \\ 7^2 + 7^2 + 7a + 7b + 28 = 0 \end{cases}$$

を満たす。これを a, b について解くと

$$a = -8, b = -10$$

となる。よって、円 C_1 の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + y^2 - 10y + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 &= 13 \end{aligned}$$

となり、この円の中心の座標は $(4, 5)$ で、半径は $\sqrt{13}$ である。

(答) 中心の座標 $(4, 5)$, 半径 $\sqrt{13}$

(2)

円 C_1 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1 - 4)(x - 4) + (y_1 - 5)(y - 5) = 13$$

と表される。したがって、円 C_1 上の点 A における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} -2(x - 4) + 3(y - 5) &= 13 \\ \Leftrightarrow -2x + 3y &= 20 \end{aligned}$$

となり、円 C_1 上の点 B における接線 m の方程式は

$$\begin{aligned} 3(x - 4) + 2(y - 5) &= 13 \\ \Leftrightarrow 3x + 2y &= 35 \end{aligned}$$

となる。よって、2 直線 l, m の交点の座標

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 3y = 20 \\ 3x + 2y = 35 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (5, 10) \end{aligned}$$

である。

(答) $(5, 10)$

(3)

放物線 C_2 の頂点が $(5, 10)$ であることから、実数 c ($c \neq 0$) を用いて

$$y = c(x - 5)^2 + 10$$

と表される。これが点 A を通るとき

$$\begin{aligned} 8 &= c \cdot (2 - 5)^2 + 10 \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。したがって、放物線 C_2 の方程式は

$$y = -\frac{2}{9}(x - 5)^2 + 10$$

となり、 C_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{9}(x - 5)^2 + 10 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 &= 45 \\ \Leftrightarrow x - 5 &= \pm 3\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x &= 5 \pm 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。以上より、求める交点の座標は

$$(5 - 3\sqrt{5}, 0), (5 + 3\sqrt{5}, 0)$$

である。

(答) $(5 - 3\sqrt{5}, 0), (5 + 3\sqrt{5}, 0)$

〔II〕

(1)

5 個の「 $\swarrow$ 」と 5 個の「 $\searrow$ 」の計 10 個の矢印を並べて、順番に矢印の通りに移動すると、北隅の A の文字から南隅の A の文字まで最短で進むことができる。よって、北隅の A から南隅の A までの最短の進み方の場合の数は、5 個の「 $\swarrow$ 」と 5 個の「 $\searrow$ 」の計 10 個の矢印の並べ方の場合の数に等しいから

$${}_{10}C_5 = 252 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 252 通り

(2)

(1)と同様に考えると、北隅の A から T 地点までの最短の進み方は

$${}_3C_2 = 3 \text{ 通り}$$

であり、T 地点から南隅の A までの最短の進み方は

$${}_7C_3 = 35 \text{ 通り}$$

である。したがって、T 地点を通る ABRACADABRA の読み方は

$$3 \cdot 35 = 105 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 105 通り

(3)

(1)と同様に考えると、北隅の A から T 地点までの最短の進み方は 3 通りあり、T 地点から U 地点までの最短の進み方は

$${}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

である。さらに、U 地点から南隅の A までの最短の進み方は

$${}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

である。よって、T 地点と U 地点の両方を通る ABRACADABRA の読み方は

$$3 \cdot 3 \cdot 6 = 54 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 54 通り

(4)

(1)と同様に考えると、U 地点を通る ABRACADABRA の読み方は

$${}_6C_3 \cdot {}_4C_2 = 120 \text{ 通り}$$

である。したがって、(2)、(3)の結果を用いて、T 地点または U 地点の少なくとも一方を通る ABRACADABRA の読み方は

$$105 + 120 - 54 = 171 \text{ 通り}$$

ある。以上より、T 地点と U 地点のどちらも通らない ABRACADABRA の読み方は

$$252 - 171 = 81 \text{ 通り}$$

となる。

(答) 81 通り

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (x)' \log x dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x + C_1\end{aligned}$$

となる。ただし、 C_1 は積分定数とする。

$$(答) \int \log x dx = x \log x - x + C_1 \quad (\text{ただし、} C_1 \text{は積分定数})$$

(2)

$f(x) = \log x$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

であるから、曲線 C 上の点 $(p, f(p))$ における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned}y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p}(x-p) + \log p \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p}x + \log p - 1\end{aligned}$$

となる。これが原点を通るとき

$$\begin{aligned}0 &= \log p - 1 \\ \Leftrightarrow p &= e\end{aligned}$$

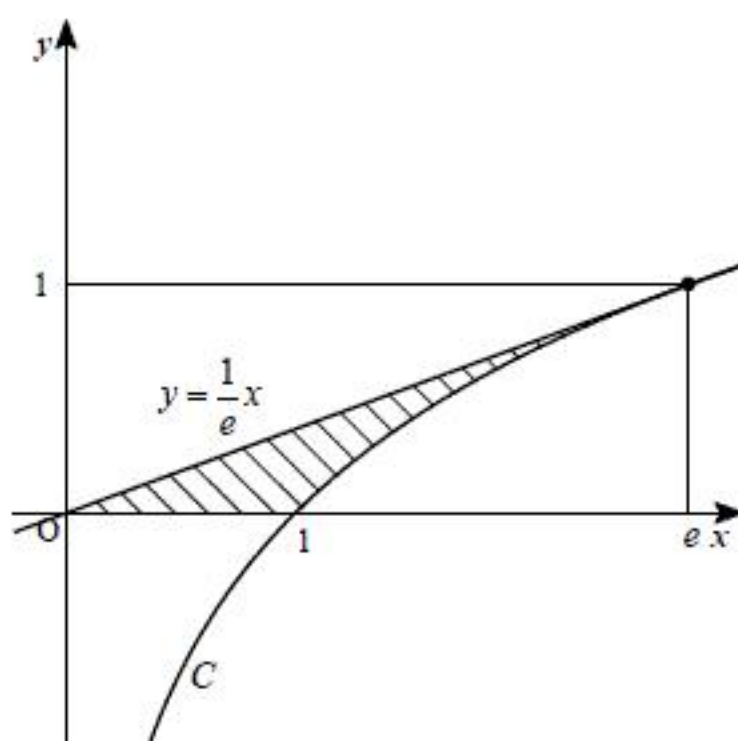
となるから、接線 l の方程式は

$$y = \frac{1}{e}x$$

であり、接点の座標は $(e, 1)$ となる。

$$(答) \quad l: y = \frac{1}{e}x, \text{ 接点 } (e, 1)$$

(3)



曲線 C と接線 l および x 軸とで囲まれた部分は上図の斜線部のようになり、この面積を S とおくと、(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e - \int_1^e \log x dx \\ &= \frac{e}{2} - [x \log x - x]_1^e \\ &= \frac{e}{2} - 1\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{1}{2}e - 1$$

(4)

(3)の図の斜線部を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とおくと、(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot e - \pi \int_1^e (\log x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3}e\pi - \pi \left([x(\log x)^2]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= -\frac{2}{3}e\pi + 2\pi \int_1^e \log x dx \\ &= -\frac{2}{3}e\pi + 2\pi [x \log x - x]_1^e \\ &= \frac{2}{3}(3-e)\pi\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{2}{3}(3-e)\pi$$

〔IV〕

(1)

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ について

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

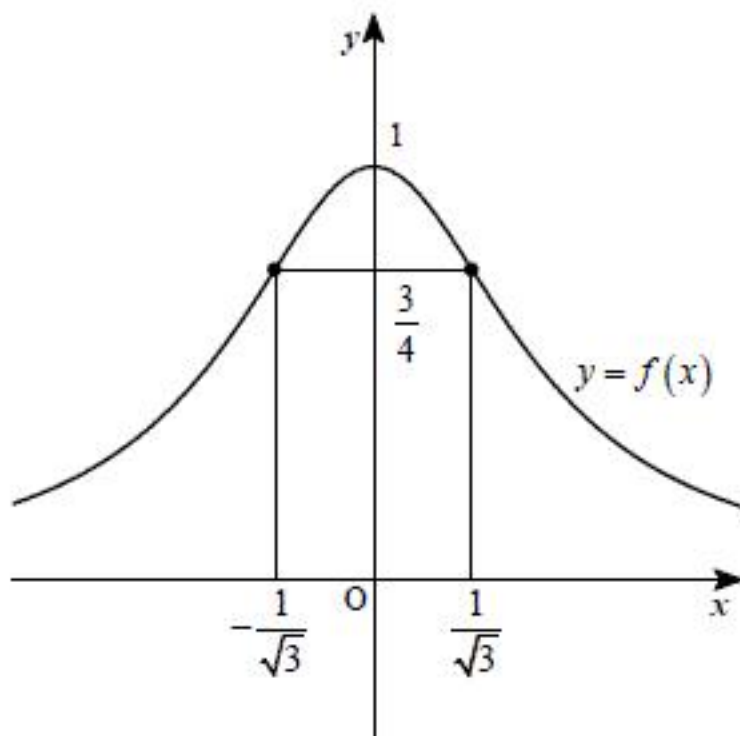
であるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	□	□	□
$f''(x)$	+	0	□	□	□	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{3}{4}$	↖	1	↘	$\frac{3}{4}$	↙

また

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

であるから、 $y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 増減・凹凸：前表，グラフ：前図

(2)

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

である。ここで $t = \tan s \left(-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと

$$\begin{array}{c|c} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\cos^2 s} & \\ \hline t & 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \hline s & 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan^2 s + 1} \cdot \frac{ds}{\cos^2 s} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 s \cdot \frac{ds}{\cos^2 s} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} ds \\ &= [s]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

(3)

$|x| < 1, |y| < 1$ であるとき

$$x = \tan u, \quad y = \tan v \quad \left(|u| < \frac{\pi}{4}, |v| < \frac{\pi}{4} \right)$$

とおくことができる。このとき、 $1-xy \neq 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{1-xy} &= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \\ &= \tan(u+v) \end{aligned}$$

である。ここで、 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ のとき、(2)と同様にして

$$\begin{aligned} F(\tan \theta) &= \int_0^{\tan \theta} \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \theta \end{aligned}$$

となるから、 $|u| < \frac{\pi}{4}, |v| < \frac{\pi}{4}$ のとき $|u+v| < \frac{\pi}{2}$ であることより

$$F(\tan(u+v)) = u+v, \quad F(\tan u) = u, \quad F(\tan v) = v$$

となる。以上より

$$F(\tan(u+v)) = F(\tan u) + F(\tan v)$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = F(x) + F(y) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)

$x=1, y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと $1-xy > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立ち

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{1-xy} &= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから

$$F(2-\sqrt{3}) = F(1) + F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

となる。ここで $f(x)$ が偶関数であるから $F(x)$ は奇関数となることに注意すると、(2)を用いて

$$\begin{aligned} F(1) &= F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned} F(2-\sqrt{3}) &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad F(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$