

〔I〕

(1)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

であるから、 $x + \frac{1}{x} = a$ とおくとき

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

となる。

$$(答) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

(2)

$x > 1$ であるから

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であり、等号成立は

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

のときとなるが、 $x > 1$ であることよりこれを満たさない。よって

$$a = x + \frac{1}{x} > 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \\ &= a^2 - 2 - 2 \\ &= a^2 - 4 \end{aligned}$$

であり、①、②より

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$$

となる。

$$(答) \quad x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$$

(3)

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

となるから、(1)、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{x^3} &= \sqrt{a^2 - 4} (a^2 - 2 + 1) \\ &= (a^2 - 1) \sqrt{a^2 - 4} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = (a^2 - 1) \sqrt{a^2 - 4}$$

〔Ⅱ〕

(1)

点 $A(2, 8)$, $B(7, 7)$ は、円 $C_1: x^2 + y^2 + ax + by + 28 = 0$ の円周上にあるから

$$\begin{cases} 2^2 + 8^2 + 2a + 8b + 28 = 0 \\ 7^2 + 7^2 + 7a + 7b + 28 = 0 \end{cases}$$

を満たす。これを a, b について解くと

$$a = -8, b = -10$$

となる。よって、円 C_1 の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + y^2 - 10y + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 &= 13 \end{aligned}$$

となり、この円の中心の座標は $(4, 5)$ で、半径は $\sqrt{13}$ である。

(答) 中心の座標 $(4, 5)$, 半径 $\sqrt{13}$

(2)

円 C_1 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1 - 4)(x - 4) + (y_1 - 5)(y - 5) = 13$$

と表される。したがって、円 C_1 上の点 A における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} -2(x - 4) + 3(y - 5) &= 13 \\ \Leftrightarrow -2x + 3y &= 20 \end{aligned}$$

となり、円 C_1 上の点 B における接線 m の方程式は

$$\begin{aligned} 3(x - 4) + 2(y - 5) &= 13 \\ \Leftrightarrow 3x + 2y &= 35 \end{aligned}$$

となる。よって、2 直線 l, m の交点の座標

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 3y = 20 \\ 3x + 2y = 35 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (5, 10) \end{aligned}$$

である。

(答) $(5, 10)$

(3)

放物線 C_2 の頂点が $(5, 10)$ であることから、実数 c ($c \neq 0$) を用いて

$$y = c(x - 5)^2 + 10$$

と表される。これが点 A を通るとき

$$\begin{aligned} 8 &= c \cdot (2 - 5)^2 + 10 \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。したがって、放物線 C_2 の方程式は

$$y = -\frac{2}{9}(x - 5)^2 + 10$$

となり、 C_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{9}(x - 5)^2 + 10 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 &= 45 \\ \Leftrightarrow x - 5 &= \pm 3\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x &= 5 \pm 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。以上より、求める交点の座標は

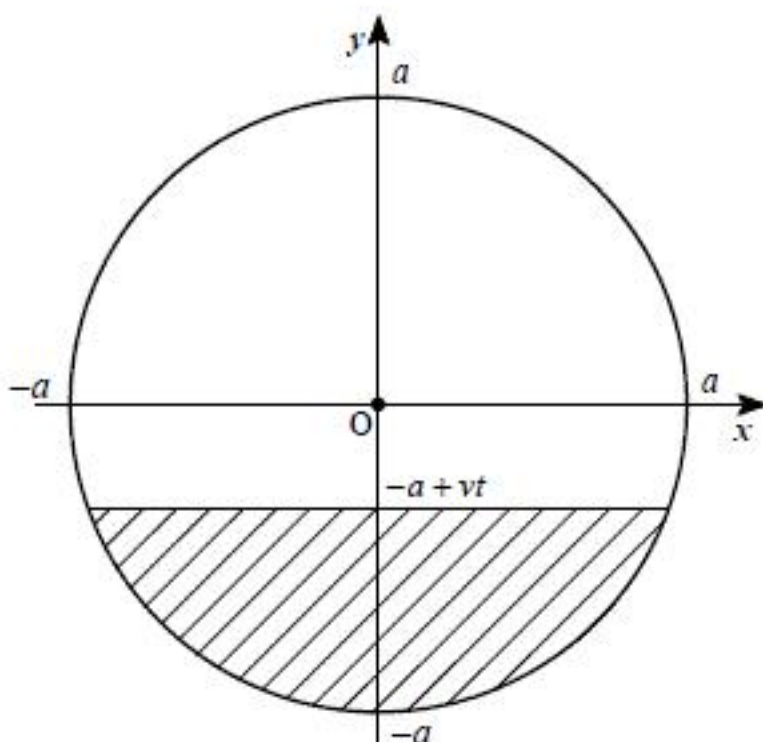
$$(5 - 3\sqrt{5}, 0), (5 + 3\sqrt{5}, 0)$$

である。

(答) $(5 - 3\sqrt{5}, 0), (5 + 3\sqrt{5}, 0)$

〔IV〕

(1)



V は上図の斜線部を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積に等しい。ここで

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{-a+vt} \left(\sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_{-a}^{-a+vt} (a^2 - y^2) dy \\ &= \pi \left[a^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-a}^{-a+vt} \\ &= \pi \left\{ a^2 \cdot (-a + vt) - \frac{1}{3} (-a + vt)^3 - a^2 \cdot (-a) + \frac{1}{3} (-a)^3 \right\} \\ &= -\frac{1}{3} \pi v^3 t^3 + \pi a v^2 t^2 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\pi v^3 t^2 + 2\pi a v^2 t \\ &= -\pi v^3 \left(t - \frac{a}{v} \right)^2 + \pi a^2 v \end{aligned}$$

となるから、変化率 $\frac{dV}{dt}$ が最大となるのは、沈み始めてから $\frac{a}{v}$ 秒後である。

$$(\text{答}) \quad V = -\frac{1}{3} \pi v^3 t^3 + \pi a v^2 t^2, \frac{a}{v} \text{ 秒後}$$

(2)

球 B は完全に水面に入った瞬間、水面と容器 Q の 3 つの面に接するから、一辺の長さが b の正四面体に半径 a の球 B が内接する。正四面体の頂点を A, B, C, D とし、辺 BC の中点を M 、点 A から $\triangle BCD$ に下ろした垂線の足を H 、球 B の中心を O とおくと、図形の対称性より A, D, M, H は同一平面上に存在する。ここで

$$\begin{aligned} AM &= AB \sin \angle ABC \\ &= b \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} b \end{aligned}$$

であり、同様に $DM = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ となる。 $\triangle AMD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle AMD &= \frac{AM^2 + MD^2 - AD^2}{2AM \cdot MD} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b \right)^2 - b^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、 $0 < \angle AMD < \pi$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \angle AMD &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle AMD} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、正四面体の体積を V' とおくと

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot DM \right) \cdot AH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot DM \right) \cdot AM \sin \angle AMD \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 \end{aligned}$$

である。次に、図形の対称性より、四面体 $OABC, OBCD, OCDA, ODAB$ の体積は等しく、この値を V'' とおくと $OH = a$ であるから

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot DM \right) \cdot OH \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} ab^2 \end{aligned}$$

となり、 $V' = 4V''$ であるから

$$V' = \frac{\sqrt{3}}{3} ab^2$$

とも表される。以上より

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 &= \frac{\sqrt{3}}{3} ab^2 \\ \Leftrightarrow b &= 2\sqrt{6}a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = 2\sqrt{6}a$$