

〔 I 〕

(1)

和が 8 となる 3 つの正の整数の組み合わせは、

$$(1, 2, 5), (1, 3, 4)$$

の 2 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{60}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{60}$$

(2)

全事象の個数は 10^3 通りである。記録された 3 つの数字のうち、同じになる 2 つの数字の選び方が 10 通り、残りの 1 つの数字の選び方が 9 通り、その数字をどの順番で取り出すかで ${}_3C_1$ 通りあるから、求める確率は、

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot {}_3C_1}{10^3} = \frac{27}{100}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{100}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$c=1$ のとき、等式(★)は、

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{1}\right) &= 2 \\ \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) &= 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。 a, b は正の整数であるから、

$$1+\frac{1}{a} > 1, 1+\frac{1}{b} > 1$$

である。したがって、

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) > 1$$

となるので、 $\textcircled{1}$ 式を満たす a, b の組は存在しない。すなわち、 $c=1$ のとき、等式(★)を満たす正の整数 a, b の組は存在しない。

(証明終)

(2)

$c=2$ のとき、等式(★)は、

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) &= 2 \\ \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 3(a+1)(b+1) &= 4ab \\ \Leftrightarrow ab-3a-3b-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow b(a-3)-3(a-3) &= 12 \\ \Leftrightarrow (a-3)(b-3) &= 12 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。 $a \geq b \geq c$ より、

$$a-3 \geq b-3 \geq -1$$

を満たすので、 $\textcircled{2}$ を満たす $(a-3, b-3)$ は、

$$(a-3, b-3) = (12, 1), (6, 2), (4, 3)$$

である。以上より、求める a, b の組は、

$$(a, b) = (15, 4), (9, 5), (7, 6)$$

となる。

(答) $(a, b) = (15, 4), (9, 5), (7, 6)$

(3)

$a \geq b \geq c$ より、

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leq \left(1+\frac{1}{c}\right)^3$$

である。ここで、 $c \geq 4$ のとき、

$$\left(1+\frac{1}{c}\right)^3 \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

となるので、 $c \geq 4$ のとき、等式(★)を満たす a, b, c の組は存在しない。したがって、このことと(1)より、等式(★)を満たす a, b, c の組が存在するならば、

$$c = 2, 3$$

に限る。 $c=3$ のとき、(2)と同様にして、

$$\begin{aligned} (\star) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow (a-2)(b-2) &= 6 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

と変形できる。 $a \geq b \geq c$ より、

$$a-2 \geq b-2 \geq 1$$

であるから、 $\textcircled{3}$ を満たす $(a-2, b-2)$ は、

$$(a-2, b-2) = (6, 1), (3, 2)$$

である。したがって、 $\textcircled{3}$ を満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (8, 3), (5, 4)$$

となる。(2)の結果とあわせて、等式(★)を満たす (a, b, c) は、

$$(a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)$$

である。

(答) $(a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)$

〔Ⅲ〕

(1)

$f(x)=0$ を満たす x の値は、

$$-x^2+10x-16=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+16=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-8)=0$$

$$\therefore x=2, 8$$

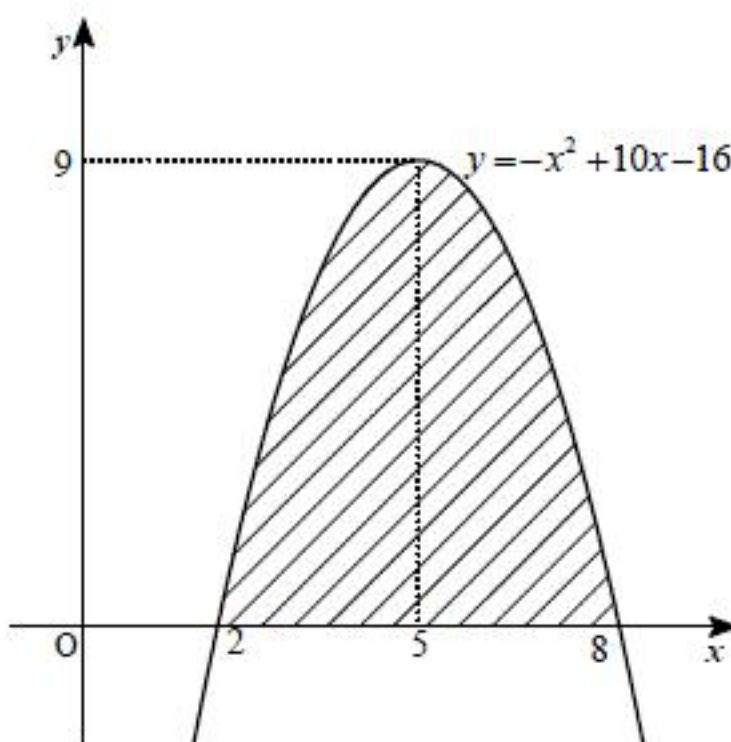
と求まる。 α, β は $f(x)=0$ の解で、 $\alpha < \beta$ であるから、

$$\alpha=2, \beta=8$$

となる。

(答) $\alpha=2, \beta=8$

(2)



求める面積は上図の斜線部であるから、

$$S = \int_2^8 (-x^2 + 10x - 16) dx$$

$$= -\int_2^8 (x-2)(x-8) dx$$

$$= \frac{1}{6} (8-2)^3$$

$$= 36$$

と求まる。

(答) $S=36$

(3)

$f(x), g(x)$ を平方完成すると、

$$f(x) = -x^2 + 10x - 16$$

$$= -(x-5)^2 + 9$$

$$g(x) = px^2 + qx$$

$$= p \left(x + \frac{q}{2p} \right)^2 - \frac{q^2}{4p} \quad (\because p \neq 0)$$

となるので、 $f(x)$ と $g(x)$ が同じ x の値で極値をとることから、

$$\frac{q}{2p} = -5$$

$$\therefore q = -10p \quad \dots \textcircled{1}$$

である。①を $g(x)$ に代入して、

$$g(x) = px^2 - 10px = p(x^2 - 10x)$$

となる。 $y=g(x)$ のグラフが x 軸と $x=0, 10$ で交わることに注意すれば、 $0 < x < 10$ におい

て、 $g(x)$ の正負が変わることはない。したがって、 $y=g(x)$ のグラフと x 軸および、

$x=\alpha(=2)$ 、 $x=\beta(=8)$ に囲まれた図形の面積を S_1 とおくと、

$$S_1 = \int_2^8 |p(x^2 - 10x)| dx$$

$$= |p| \int_2^8 (-x^2 + 10x) dx$$

$$= |p| \left[-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 \right]_2^8$$

$$= 132|p|$$

と表せる。 $S_1=S=36$ であるから、

$$132|p| = 36$$

$$\therefore p = \pm \frac{3}{11}$$

と求まる。これを①に代入して、

$$(p, q) = \left(-\frac{3}{11}, \frac{30}{11} \right), \left(\frac{3}{11}, -\frac{30}{11} \right)$$

と求まる。

(答) $(p, q) = \left(-\frac{3}{11}, \frac{30}{11} \right), \left(\frac{3}{11}, -\frac{30}{11} \right)$

〔Ⅳ〕

(1)

条件より、

$$\overline{PR} \perp \text{平面} \alpha$$

であるから、 $\overline{OR}$ は実数 p を用いて、

$$\overline{OR} = \overline{OP} + p\vec{n}$$

と表せる。また、 PR の中点を点 M とすると、

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \frac{p}{2}\vec{n}$$

と表せる。点 M は平面 α 上の点であるから、

$$\overline{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{OP} + \frac{p}{2}\vec{n} - \overline{OA} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}p-3 \\ \frac{1}{2}p-1 \\ p+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 2 \right)p + (9 - 1 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7p = -14$$

$$\therefore p = -2$$

$$\therefore \overline{OR} = (4, -1, 3)$$

と求まる。

(答) $R(4, -1, 3)$

(2)

(1)の結果より、

$$\overline{RQ} = (-3, 4, 4)$$

である。また、

$$PS + QS = RS + QS \geq RQ$$

で、等号は、 S が線分 RQ 上にあるときに成立する。したがって、 $PS + QS$ の最小値は

$$\begin{aligned} |\overline{RQ}| &= \sqrt{9+16+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

と求まる。また、点 S は線分 RQ 上にあることから、実数 q を用いて

$$\overline{OS} = \overline{OR} + q\overline{RQ}$$

と表され、また平面 α 上の点であることから、

$$\overline{AS} \cdot \vec{n} = 0$$

を満たす。したがって、

$$\overline{AS} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{OR} + q\overline{RQ} - \overline{OA}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3q+3 \\ 4q-3 \\ 4q-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9+4+8)q + (-9-3-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 21q = 14$$

$$\therefore q = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \overline{OS} = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{17}{3} \right)$$

と求まる。

(答) $S\left(2, \frac{5}{3}, \frac{17}{3}\right)$, 最小値: $\sqrt{41}$