

〔 I 〕

(1)

和が 8 となる 3 つの正の整数の組み合わせは、

$$(1, 2, 5), (1, 3, 4)$$

の 2 通りである。全事象は、

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (\text{通り})$$

であるから、求める確率は、

$$p_3 = 0 \quad (n=3 \text{ のとき})$$

$$p_4 = \frac{1}{\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6}} = \frac{1}{4} \quad (n=4 \text{ のとき})$$

$$p_n = \frac{2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{12}{n(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 5 \text{ のとき})$$

となる。

(答)

$$p_3 = 0 \quad (n=3 \text{ のとき})$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \quad (n=4 \text{ のとき})$$

$$p_n = \frac{12}{n(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 5 \text{ のとき})$$

(2)

全事象の個数は n^3 通りである。記録された 3 つの数字のうち、同じになる 2 つの数字の選び方が n 通り、残りの 1 つの数字の選び方が $(n-1)$ 通り、その数字をどの順番で取り出すかで ${}_3C_1$ 通りあるから、求める確率は、

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot {}_3C_1}{n^3} = \frac{3(n-1)}{n^2}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{3(n-1)}{n^2}$$

(3)

(2)より、

$$\frac{3(n-1)}{n^2} \geq \frac{1}{2}$$

となればよい。

$$\frac{3(n-1)}{n^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6(n-1) \geq n^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 6n + 6 \leq 0$$

$$\therefore 3 - \sqrt{3} < n < 3 + \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と解ける。 $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす 3 以上の自然数 n は、

$$n = 3, 4$$

と求まる。

$$(答) \quad n = 3, 4$$

〔Ⅱ〕

$a \geq b \geq c$ より,

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3$$

である。 $c \geq 4$ のとき,

$$\left(1 + \frac{1}{c}\right)^3 \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

であるから、 $c \geq 4$ のとき、等式(★)を満たす a, b, c の組は存在しない。したがって、等式(★)を満たすならば、

$$c = 1, 2, 3$$

のいずれかである。

[1] $c = 1$ のとき、

等式(★)は、

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。 a, b は正の整数であるから、

$$1 + \frac{1}{a} > 1, 1 + \frac{1}{b} > 1$$

である。したがって、

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) > 1$$

となるので、①式を満たす a, b の組は存在しない。すなわち、 $c = 1$ のとき、等式(★)を満たす正の整数 a, b の組は存在しない。

[2] $c = 2$ のとき、

等式(★)は、

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(a+1)(b+1) = 4ab$$

$$\Leftrightarrow ab - 3a - 3b - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow b(a-3) - 3(a-3) = 12$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(b-3) = 12 \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。 $a \geq b \geq c$ より、

$$a-3 \geq b-3 \geq -1$$

を満たすので、②を満たす $(a-3, b-3)$ は、

$$(a-3, b-3) = (12, 1), (6, 2), (4, 3)$$

である。以上より、求める a, b の組は、

$$(a, b) = (15, 4), (9, 5), (7, 6)$$

となる。

[3] $c = 3$ のとき、

$c = 2$ のときと同様にして、

$$(\star) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 6 \quad \dots \textcircled{3}$$

と変形できる。 $a \geq b \geq c$ より、

$$a-2 \geq b-2 \geq 1$$

であるから、③を満たす $(a-2, b-2)$ は、

$$(a-2, b-2) = (6, 1), (3, 2)$$

である。したがって、③を満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (8, 3), (5, 4)$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、等式(★)を満たす (a, b, c) は、

$$(a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)$$

である。

$$(\text{答}) (a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt = \cos(ax) - b \quad \dots \textcircled{1}$$

①の左辺を変形すると,

$$\Leftrightarrow x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt = \cos(ax) - b \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②の両辺を x で微分して,

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) &= -a \sin(ax) \\ \Leftrightarrow \int_a^x f(t)dt &= -a \sin(ax) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。③に $x=a$ を代入すると,

$$0 = -a \sin a^2$$

となるが, $a \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \sin a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= m\pi \quad (m \text{ は整数}) \end{aligned}$$

となる。 $0 < a < 2$ より, $0 < a^2 < 4$ であり, また, 直径 2 の円に内接する正 6 角形と外接する正方形の周長を考えて, $6 < 2\pi < 8 \Leftrightarrow 3 < \pi < 4$ となることから,

$$m=1$$

となり,

$$a^2 = \pi \quad \therefore a = \sqrt{\pi}$$

と求まる。①の両辺に $x=a$ を代入すると,

$$0 = \cos a^2 - b$$

となるので, 上式に $a = \sqrt{\pi}$ を代入して,

$$b = \cos \pi = -1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (\sqrt{\pi}, -1)$$

(2)

③の両辺を x で微分して,

$$f(x) = -a^2 \cos(ax)$$

となるので, 上式に $a = \sqrt{\pi}$ を代入して,

$$f(x) = -\pi \cos(\sqrt{\pi}x)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\pi \cos(\sqrt{\pi}x)$$

(3)

$-1 \leq \cos(\sqrt{\pi}x) \leq 1$ から, (2)の結果より, $f(x)$ が最大となるのは,

$$\cos(\sqrt{\pi}x) = -1$$

のときである。したがって, n を整数とすると,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi}x &= \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi \\ \therefore x &= (2n+1)\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = (2n+1)\sqrt{\pi} \quad (n \text{ は整数})$$

[IV]

(1)

$f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

となるので,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \log x = 0 \quad \therefore x = e$$

となり, 増減表は下のようになる。

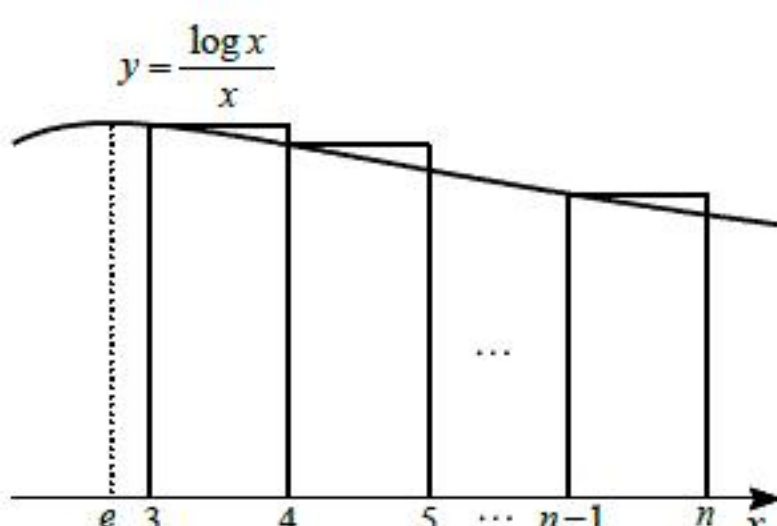
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

以上より, $y = \frac{\log x}{x} (x > 0)$ は $x = e$ のとき極値 $\frac{1}{e}$ をとる。

(答) 前表, 極値: $\frac{1}{e}$ ($x = e$ のとき)

(2)

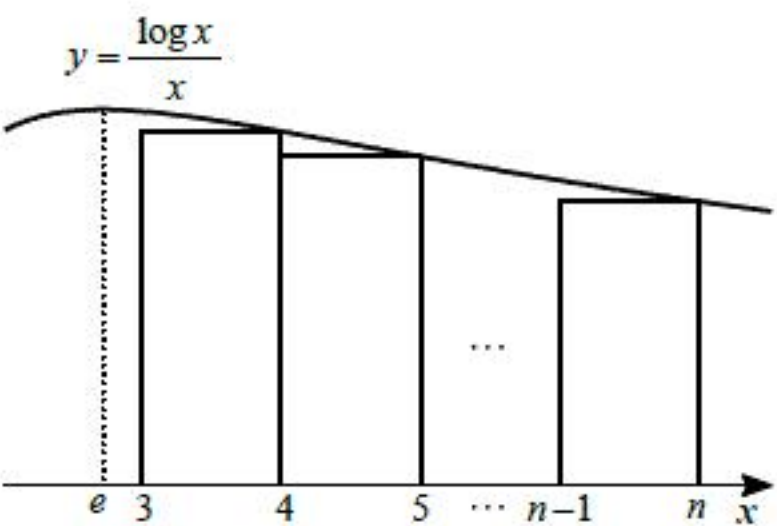
$e < 3$ より, $x \geq 3$ のとき $f(x)$ は単調減少する。



上図より,

$$\int_3^n \frac{\log x}{x} dx \leq S_n$$

であることが分かる。



また, 上図より,

$$S_n - \frac{\log 3}{3} \leq \int_3^n \frac{\log x}{x} dx$$

であることが分かる。以上より,

$$S_n - \frac{\log 3}{3} \leq \int_3^n \frac{\log x}{x} dx \leq S_n$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)より,

$$\int_3^n \frac{\log x}{x} dx \leq S_n$$

$$\Leftrightarrow \int_3^n \frac{\log x}{x} dx + \frac{\log n}{n} \leq S_n$$

であり,

$$S_n - \frac{\log 3}{3} \leq \int_3^n \frac{\log x}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq \int_3^n \frac{\log x}{x} dx + \frac{\log 3}{3}$$

であるから,

$$\int_3^n \frac{\log x}{x} dx + \frac{\log n}{n} \leq S_n \leq \int_3^n \frac{\log x}{x} dx + \frac{\log 3}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$\begin{aligned} \int_3^n \frac{\log x}{x} dx &= \int_3^n (\log x)' \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_3^n \\ &= \frac{1}{2} \{ (\log n)^2 - (\log 3)^2 \} \end{aligned}$$

であるから,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \{ (\log n)^2 - (\log 3)^2 \} + \frac{\log n}{n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} \{ (\log n)^2 - (\log 3)^2 \} + \frac{\log 3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\log 3}{\log n} \right)^2 \right\} + \frac{1}{n \log n} \leq \frac{S_n}{(\log n)^2} \leq \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\log 3}{\log n} \right)^2 \right\} + \frac{\log 3}{3 (\log n)^2}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\log 3}{\log n} \right)^2 \right\} + \frac{1}{n \log n} \right] &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\log 3}{\log n} \right)^2 \right\} + \frac{\log 3}{3 (\log n)^2} \right] &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(\log n)^2} = \frac{1}{2}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(\log n)^2} = \frac{1}{2}$