

〔 I 〕

(1)

和が 8 となる 3 つの正の整数の組み合わせは、

$$(1, 2, 5), (1, 3, 4)$$

の 2 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{60}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{1}{60}$$

(2)

全事象の個数は 10^3 通りである。記録された 3 つの数字のうち、同じになる 2 つの数字の選び方が 10 通り、残りの 1 つの数字の選び方が 9 通り、その数字をどの順番で取り出すかで ${}_3C_1$ 通りあるから、求める確率は、

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot {}_3C_1}{10^3} = \frac{27}{100}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{27}{100}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

であるから、

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$$

となる。したがって、 $f(x)$ の増減表は下の通りである。

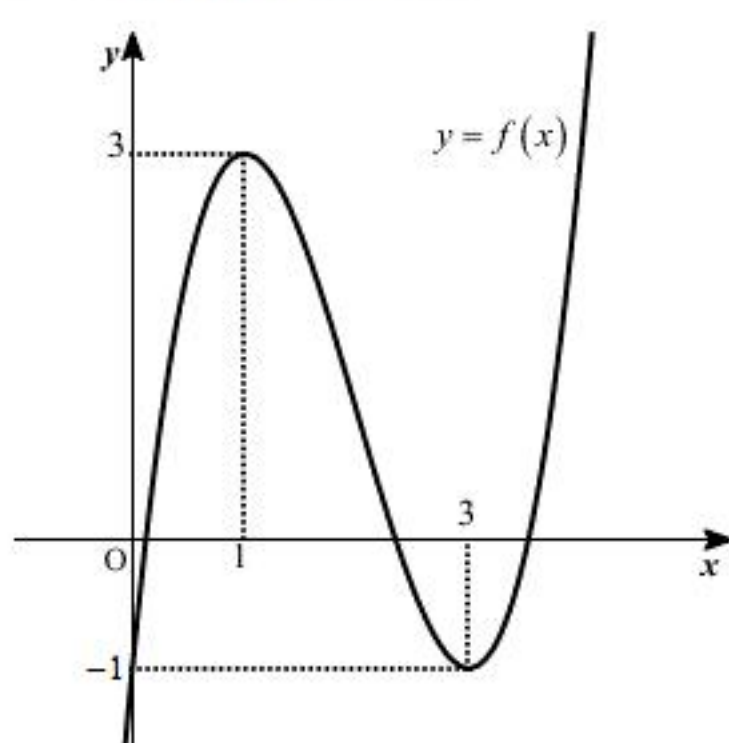
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

よって、 $y = f(x)$ は、

$x = 1$ のとき、極大値 3

$x = 3$ のとき、極小値 -1

をとり、 $y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる。



(答) 前図参照、極大値: 3 ($x = 1$ のとき)、極小値: -1 ($x = 3$ のとき)

(2)

点 A における $y = f(x)$ の接線は、

$$\begin{aligned} y &= (3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 9)(x - 2) + 1 \\ &= -3(x - 2) + 1 \\ &= -3x + 7 \end{aligned}$$

であり、点 B における $y = f(x)$ の接線は

$$\begin{aligned} y &= (3 \cdot 16 - 12 \cdot 4 + 9)(x - 4) + 3 \\ &= 9(x - 4) + 3 \\ &= 9x - 33 \end{aligned}$$

である。

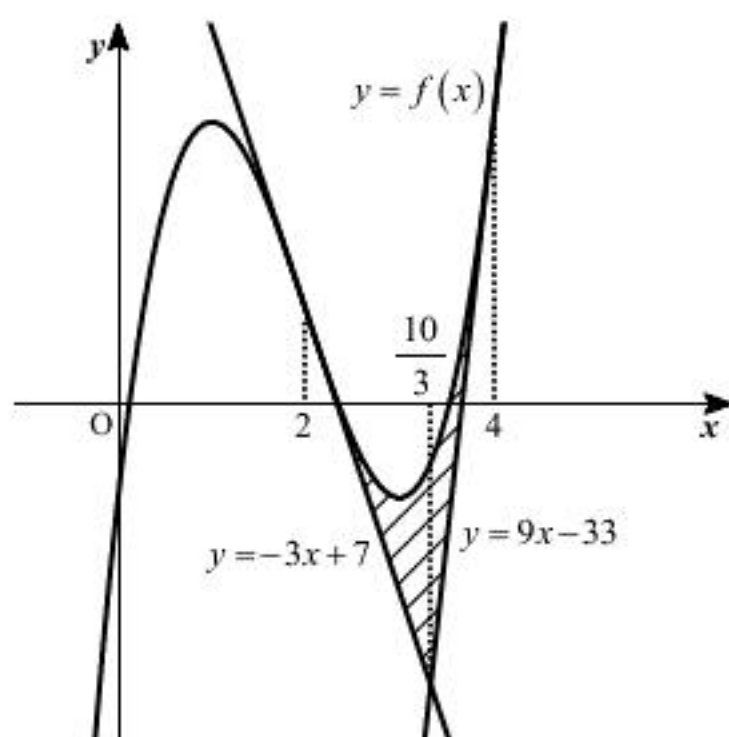
(答) 点 A: $y = -3x + 7$, 点 B: $y = 9x - 33$

(3)

(2) で求めた 2 つの接線の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -3x + 7 &= 9x - 33 \\ \therefore x &= \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

であるから、求める面積は下図の斜線部の面積である。



求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{\frac{10}{3}} \{(x^3 - 6x^2 + 9x - 1) - (-3x + 7)\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{10}{3}}^4 \{(x^3 - 6x^2 + 9x - 1) - (9x - 33)\} dx \\ &= \int_2^{\frac{10}{3}} (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) dx + \int_{\frac{10}{3}}^4 (x^3 - 6x^2 + 32) dx \\ &= \int_2^{\frac{10}{3}} (x-2)^3 dx + \int_{\frac{10}{3}}^4 (x-4)^2 (x+2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (x-2)^4 \right]_2^{\frac{10}{3}} + \left[\frac{1}{3} (x-4)^3 \cdot (x+2) \right]_{\frac{10}{3}}^4 - \int_{\frac{10}{3}}^4 \frac{1}{3} (x-4)^3 \cdot (x+2)' dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^4 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{16}{3} \right) - \left[\frac{1}{12} (x-4)^4 \right]_{\frac{10}{3}}^4 \\ &= \frac{3 \cdot 4^3 + 2^3 \cdot 16 + 2^2}{3^5} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{4}{3}$

〔Ⅲ〕

(1)

条件より,

$$\overrightarrow{PR} \perp \text{平面} \alpha$$

であるから, $\overrightarrow{OR}$ は実数 p を用いて,

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + p\vec{n}$$

と表せる。また, PR の中点を点 M とすると,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{p}{2}\vec{n}$$

と表せる。点 M は平面 α 上の点であるから,

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OP} + \frac{p}{2}\vec{n} - \overrightarrow{OA} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}p-3 \\ \frac{1}{2}p-1 \\ p+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}p + 2 \right) p + (9 - 1 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7p = -14$$

$$\therefore p = -2$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = (4, -1, 3)$$

と求まる。

(答) $R(4, -1, 3)$

(2)

(1)の結果より,

$$\overrightarrow{RQ} = (-3, 4, 4)$$

である。また,

$$PS + QS = RS + QS \geq RQ$$

で, 等号は, S が線分 RQ 上にあるときに成立する。したがって, PS + QS の最小値は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RQ}| &= \sqrt{9+16+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

と求まる。また, 点 S は線分 RQ 上にあることから, 実数 q を用いて

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + q\overrightarrow{RQ}$$

と表され, また平面 α 上の点であることから,

$$\overrightarrow{AS} \cdot \vec{n} = 0$$

を満たす。したがって,

$$\overrightarrow{AS} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OR} + q\overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3q+3 \\ 4q-3 \\ 4q-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9+4+8)q + (-9-3-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 21q = 14$$

$$\therefore q = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{OS} = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{17}{3} \right)$$

と求まる。

(答) $S\left(2, \frac{5}{3}, \frac{17}{3}\right)$, 最小値: $\sqrt{41}$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt = \cos(ax) - b \quad \cdots \textcircled{1}$$

①の左辺を変形すると,

$$x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt = \cos(ax) - b \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。②の両辺を x で微分して,

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) &= -a \sin(ax) \\ \Leftrightarrow \int_a^x f(t)dt &= -a \sin(ax) \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。③に $x=a$ を代入すると,

$$0 = -a \sin a^2$$

となるが, $a \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \sin a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= m\pi \quad (m \text{ は整数}) \end{aligned}$$

となる。 $0 < a < 2$ より, $0 < a^2 < 4$ であり, また, 直径 2 の円に内接する正 6 角形と外接する正方形の周長を考えて, $6 < 2\pi < 8 \Leftrightarrow 3 < \pi < 4$ となることから,

$$m = 1$$

となり,

$$a^2 = \pi \quad \therefore a = \sqrt{\pi}$$

と求まる。①の両辺に $x=a$ を代入すると,

$$0 = \cos a^2 - b$$

となるので, 上式に $a = \sqrt{\pi}$ を代入して,

$$b = \cos \pi = -1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (\sqrt{\pi}, -1)$$

(2)

③の両辺を x で微分して,

$$f(x) = -a^2 \cos(ax)$$

となるので, 上式に $a = \sqrt{\pi}$ を代入して,

$$f(x) = -\pi \cos(\sqrt{\pi}x)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\pi \cos(\sqrt{\pi}x)$$

(3)

$-1 \leq \cos(\sqrt{\pi}x) \leq 1$ から, (2)の結果より, $f(x)$ が最大となるのは,

$$\cos(\sqrt{\pi}x) = -1$$

のときである。したがって, n を整数とすると,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi}x &= \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi \\ \therefore x &= (2n+1)\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = (2n+1)\sqrt{\pi} \quad (n \text{ は整数})$$