

〔Ⅰ〕

(1)

解の公式から方程式 $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

となる。

$$(答) \quad x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

(2)

(ア)

(1)より $\alpha = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$, $\beta = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$ となる。

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \right)^2 \\ &= \frac{2 - 4i - 2}{4} \\ &= -i \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= \alpha^2 \cdot \alpha^2 \\ &= (-i)^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha^4 = -1$$

(イ)

(ア)より

$$\begin{aligned} \alpha^8 &= \alpha^4 \cdot \alpha^4 \\ &= -1 \cdot -1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha^8 = 1$$

(ウ)

α, β は方程式 $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ の 2 つの異なる解であるため解と係数の関係より

$$\alpha\beta = 1$$

となる。

$$(答) \quad \alpha\beta = 1$$

(エ)

$$1010 = 8 \times 126 + 2$$

であるので

$$\begin{aligned} \alpha^{1010} &= (\alpha^8)^{126} \cdot \alpha^2 \\ &= 1^{126} \cdot (-i) \\ &= -i \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha^{1010} = -i$$

(オ)

$$\begin{aligned} \alpha^{2017} \beta^{2013} &= (\alpha\beta)^{2013} \cdot \alpha^4 \\ &= 1^{2013} \cdot (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha^{2017} \beta^{2013} = -1$$

〔Ⅱ〕

(1)

$$4\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \text{ より}$$

$$4\overrightarrow{OC} + 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + 5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{4} \\ &= \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{5+3} \times 2 \end{aligned}$$

となるので

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{8}$$

となる。これより

$$AD:DB = 5:3, OD:DC = 1:1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AD:DB = 5:3, OD:DC = 1:1$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin 75^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{8} \end{aligned}$$

となる。(2)から $OD:DC = 1:1$ であるので

$$\triangle OAB : \triangle ACB = 1:1$$

となる。よって四角形 OACB の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= 2 \triangle OAB \\ &= \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \end{aligned}$$

となる。次に(2)から $AD:DB = 5:3$ であるので

$$\triangle OAC : \triangle OBC = 5:3$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \triangle OAC &= \frac{5}{8} S \\ &= \frac{75(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{32} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{四角形 OACB の面積} \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}, \quad \text{三角形 OAC の面積} \frac{75(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{32}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 3^n$ の両辺に底 3 の対数をとると

$$\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \log_3 3^n$$

$$\Leftrightarrow \log_3 a_{n+1} - 2\log_3 a_n = n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n = n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n + n \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $b_1 = \log_3 a_1 = 0$ であるため $b_2 = 2b_1 + 1 = 1$ となる。 $\textcircled{1}$ から

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + (n+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ から

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) + 1$$

$$\Leftrightarrow (b_{n+2} - b_{n+1} + 1) = 2(b_{n+1} - b_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - b_n + 1 = 2^{n-1}(b_2 - b_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + 2^n - 1$$

となる。ここで左辺に $\textcircled{1}$ を代入すると

$$2b_n + n = b_n + 2^n - 1$$

$$\Leftrightarrow b_n = 2^n - n - 1$$

となる。

(答) $b_n = 2^n - n - 1$

(2)

$a_n \geq 10^{100}$ となるとき

$$\log_3 a_n \geq \log_3 10^{100}$$

$$\Leftrightarrow b_n \geq 100 \log_3 10$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} 100 \log_3 10 &= 100 \times \frac{1}{\log_{10} 3} \\ &= 100 \times \frac{1}{0.4771} \end{aligned}$$

$$\therefore 209 < 100 \log_3 10 < 210$$

である。また $\textcircled{1}$ から $b_{n+1} > b_n$ であり

$$b_7 = 2^7 - 7 - 1 = 120$$

$$b_8 = 2^8 - 8 - 1 = 247$$

であるため $b_n \geq 100 \log_3 10$ となる最小の n は

$$n = 8$$

となる。よって $a_n \geq 10^{100}$ となる最小の n も

$$n = 8$$

となる。

(答) $n = 8$

〔Ⅳ〕

(1)

問題文から方程式 $7x = 1111 - 13y$ が得られる。この方程式において、 x が自然数であることから左辺は 7 の倍数となる。よって右辺も 7 の倍数である。ここで $y = 1$ を代入すると右辺は

$$1111 - 13 = 1098$$

となる。ここで 1098 は 7 で割り切れないため不適である。 $y = 2$ を代入すると右辺は

$$1111 - 13 \times 2 = 1085$$

となる。ここで 1085 は 7 で割り切れるため $y = 2$ は方程式の解である。よってこの方程式は

$$7x = 1111 - 13y$$

$$\Leftrightarrow 7x = 1111 - 13(y - 2) - 13 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 7x = 1085 - 13(y - 2)$$

$$\Leftrightarrow 7(155 - x) = 13(y - 2)$$

と変形できる。ここで 7 と 13 は互いに素であるので整数 k を用いて

$$\begin{cases} 155 - x = 13k \\ y - 2 = 7k \end{cases}$$

とおける。よって

$$\begin{cases} x = 155 - 13k \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

となる。 x, y が自然数であることより

$$x > 0, y > 0$$

となるため

$$\begin{cases} 155 - 13k > 0 \\ 7k + 2 > 0 \end{cases}$$

となる。ここで k が整数であることに注意すると

$$0 \leq k \leq 11$$

となる。よって求める組の数は 12 個となる。

(答) 12 個

(2)

$$\begin{cases} x = 155 - 13k \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

を用いると

$$\begin{aligned} s &= -x + 2y \\ &= -155 + 13k + 14k + 4 \\ &= 27k - 151 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq k \leq 11$ より s の最小値は $k = 0$ のときでありその値は -151 となり、最大値は $k = 11$ のときでありその値は 146 となる。

(答) 最大値 146, 最小値 -151

(3)

$$\begin{cases} x = 155 - 13k \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

を用いると

$$\begin{aligned} t &= |2x - 5y| \\ &= |310 - 26k - 35 - 10| \\ &= |-61k + 300| \end{aligned}$$

となる。ここで方程式 $-61\alpha + 300 = 0$ の解は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{300}{61} \\ \therefore 4.5 < \alpha < 5.5 \end{aligned}$$

である。ここで $-61k + 300$ は k の一次関数かつ単調減少なので、 t は $k = 5$ のとき最小となる。このとき

$$\begin{aligned} t &= |-305 + 300| \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。また、 t が最大となるのは $k = 0$ または $k = 11$ となるときである。 $k = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} t &= |0 + 300| \\ &= 300 \end{aligned}$$

となり、 $k = 11$ のとき、

$$\begin{aligned} t &= |-61 \cdot 11 + 300| \\ &= 371 \end{aligned}$$

となる。よって t の最大値は 371, 最小値は 5 となる。

(答) 最大値 371, 最小値 5