

〔Ⅰ〕

(1)

問題文から方程式 $7x = 1111 - 13y$ が得られる。この方程式において、 x が自然数であることから左辺は 7 の倍数となる。よって右辺も 7 の倍数である。ここで $y = 1$ を代入すると右辺は

$$1111 - 13 = 1098$$

となる。ここで 1098 は 7 で割り切れないため不適である。 $y = 2$ を代入すると右辺は

$$1111 - 13 \cdot 2 = 1085$$

となる。ここで 1085 は 7 で割り切れるため $y = 2$ は方程式の解である。よってこの方程式は

$$7x = 1111 - 13y$$

$$\Leftrightarrow 7x = 1111 - 13(y - 2) - 13 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 7x = 1085 - 13(y - 2)$$

$$\Leftrightarrow 7(155 - x) = 13(y - 2)$$

と変形できる。ここで 7 と 13 は互いに素より、 $y - 2$ は 7 の倍数であるから整数 k を用いて $y - 2 = 7k$ とおける。このとき、

$$\begin{cases} x = 155 - 13k \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

となる。 x, y が自然数であることより

$$x \geq 1, y \geq 1$$

となるため

$$\begin{cases} 155 - 13k \geq 1 \\ 7k + 2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{7} \leq k \leq \frac{154}{13}$$

となる。よって k が整数であることに注意すると

$$0 \leq k \leq 11$$

となる。したがって求める組の数は 12 個となる。

(答) 12 個

(2)

$$\begin{cases} x = 155 - 13k \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

を用いると

$$\begin{aligned} s &= -x + 2y \\ &= -155 + 13k + 14k + 4 \\ &= 27k - 151 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq k \leq 11$ より s の最小値は $k = 0$ のときであり、その値は -151 となる。最大値は $k = 11$ のときであり、その値は 146 となる。

(答) 最大値 146, 最小値 -151

(3)

$$\begin{cases} x = 155 - 13k \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

を用いると

$$\begin{aligned} t &= |2x - 5y| \\ &= |310 - 26k - 35k - 10| \\ &= |-61k + 300| \end{aligned}$$

となる。ここで方程式 $-61k + 300 = 0$ の解は

$$k = \frac{300}{61}$$

であり、 $4.5 < k < 5.5$ である。ここで $t = |-61k + 300|$ のグラフは直線 $k = \frac{300}{61}$ に関して対称だから、 t は $k = 5$ のとき最小となる。このとき

$$\begin{aligned} t &= |-305 + 300| \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。また、 t が最大となるのは $k = 0$ または $k = 11$ となるときである。 $k = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} t &= |0 + 300| \\ &= 300 \end{aligned}$$

となり、 $k = 11$ のとき、

$$\begin{aligned} t &= |-61 \cdot 11 + 300| \\ &= 371 \end{aligned}$$

となる。よって t の最大値は 371, 最小値は 5 となる。

(答) 最大値 371, 最小値 5

〔Ⅱ〕

(1)

$\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 3^n$ の両辺に底 3 の対数をとると

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n^2} &= \log_3 3^n \\ \Leftrightarrow \log_3 a_{n+1} - 2\log_3 a_n &= n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n &= n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n + n \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $b_1 = \log_3 a_1 = 0$ であるため $b_2 = 2b_1 + 1 = 1$ となる。 $\textcircled{1}$ から

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + (n+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ から

$$\begin{aligned}b_{n+2} - b_{n+1} &= 2(b_{n+1} - b_n) + 1 \\ \Leftrightarrow (b_{n+2} - b_{n+1} + 1) &= 2(b_{n+1} - b_n + 1)\end{aligned}$$

となる。よって数列 $\{b_{n+1} - b_n + 1\}$ は初項 $b_2 - b_1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n + 1 &= 2^{n-1} \cdot 2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n + 2^n - 1\end{aligned}$$

となる。ここで左辺に $\textcircled{1}$ を代入すると

$$\begin{aligned}2b_n + n &= b_n + 2^n - 1 \\ \Leftrightarrow b_n &= 2^n - n - 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n = 2^n - n - 1$

(2)

$a_n \geq 10^{100}$ となるとき

$$\begin{aligned}\log_3 a_n &\geq \log_3 10^{100} \\ \Leftrightarrow b_n &\geq 100 \log_3 10\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}100 \log_3 10 &= 100 \cdot \frac{1}{\log_{10} 3} \\ &= 100 \cdot \frac{1}{0.4771}\end{aligned}$$

$$\therefore 209 < 100 \log_3 10 < 210$$

である。また $\textcircled{1}$ から $b_{n+1} > b_n$ であり

$$\begin{aligned}b_7 &= 2^7 - 7 - 1 = 120 \\ b_8 &= 2^8 - 8 - 1 = 247\end{aligned}$$

であるため $b_n \geq 100 \log_3 10$ となる最小の n は

$$n = 8$$

となる。よって $a_n \geq 10^{100}$ となる最小の n も

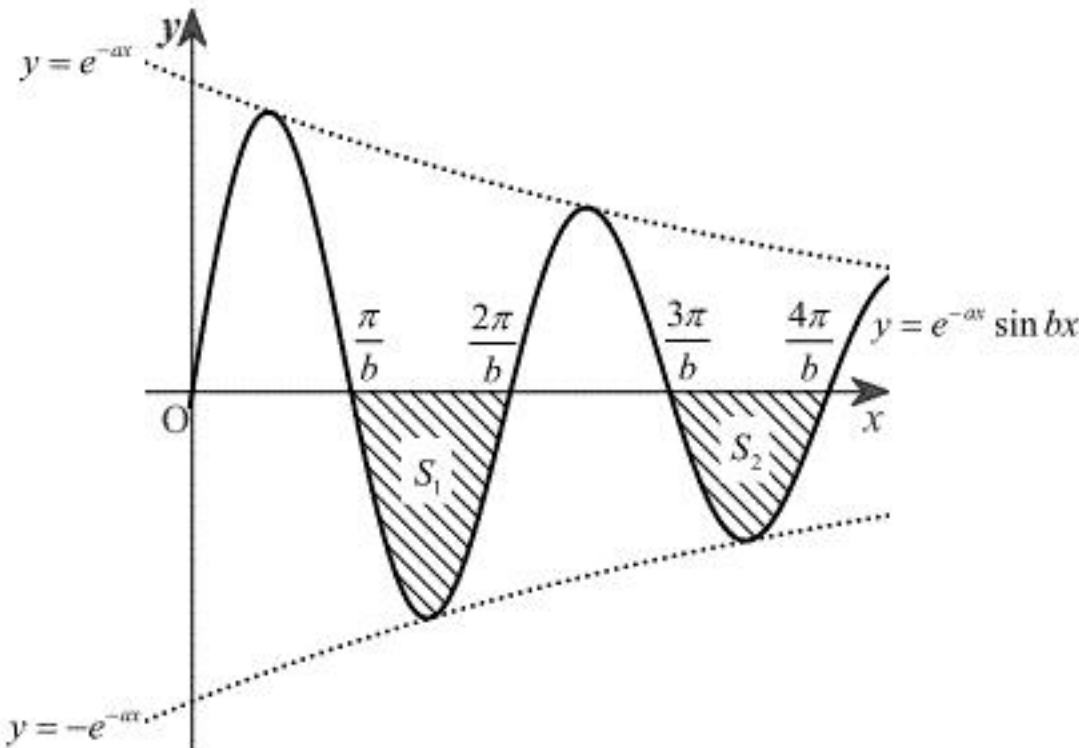
$$n = 8$$

となる。

(答) $n = 8$

〔Ⅲ〕

$y = e^{-ax} \sin bx$ について $e^{-ax} > 0$ であることから $\sin bx \leq 0$ において $y \leq 0$ となる。図示すると以下ようになる。



よって $y \leq 0$ となるとき自然数 k を用いると

$$(2k-1)\pi \leq bx \leq 2k\pi$$

となる。 b は正の定数であるので

$$\frac{(2k-1)\pi}{b} \leq x \leq \frac{2k\pi}{b}$$

となる。よって

$$S_k = \int_{\frac{(2k-1)\pi}{b}}^{\frac{2k\pi}{b}} (-e^{-ax} \sin bx) dx$$

となる。 $\int e^{-ax} \sin bx dx$ を求める。ここで

$$(e^{-ax} \sin bx)' = -ae^{-ax} \sin bx + be^{-ax} \cos bx \quad \cdots \cdots ①$$

$$(e^{-ax} \cos bx)' = -ae^{-ax} \cos bx - be^{-ax} \sin bx \quad \cdots \cdots ②$$

となる。① $\times a$ + ② $\times b$ より

$$\begin{aligned} a(e^{-ax} \sin bx)' + b(e^{-ax} \cos bx)' &= -(a^2 + b^2)e^{-ax} \sin bx \\ \Leftrightarrow e^{-ax} \sin bx &= -\frac{a}{a^2 + b^2}(e^{-ax} \sin bx)' + \frac{b}{a^2 + b^2}(e^{-ax} \cos bx)' \end{aligned}$$

となる。よって

$$\int e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{a}{a^2 + b^2} e^{-ax} \sin bx - \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-ax} \cos bx + C$$

となる(C は積分定数)。よって

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{\frac{(2k-1)\pi}{b}}^{\frac{2k\pi}{b}} (-e^{-ax} \sin bx) dx \\ &= \left[\frac{a}{a^2 + b^2} e^{-ax} \sin bx + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-ax} \cos bx \right]_{\frac{(2k-1)\pi}{b}}^{\frac{2k\pi}{b}} \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-\frac{2ka}{b}\pi} + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-\frac{(2k-1)a}{b}\pi} \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} \left(1 + e^{\frac{a}{b}\pi} \right) e^{-\frac{2ka}{b}\pi} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sum_{k=1}^n e^{-\frac{2ka}{b}\pi} = e^{-\frac{2a}{b}\pi} \frac{1 - e^{-\frac{2an}{b}\pi}}{1 - e^{-\frac{2a}{b}\pi}}$$

となり、 $e^{-\frac{2a}{b}\pi} < e^0 = 1$ であるため

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{2ka}{b}\pi} = \frac{e^{-\frac{2a}{b}\pi}}{1 - e^{-\frac{2a}{b}\pi}}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{b}{a^2 + b^2} \left(1 + e^{\frac{a}{b}\pi} \right) e^{-\frac{2ka}{b}\pi} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a^2 + b^2} \left(1 + e^{\frac{a}{b}\pi} \right) \sum_{k=1}^n e^{-\frac{2ka}{b}\pi} \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} \left(1 + e^{\frac{a}{b}\pi} \right) \frac{e^{-\frac{2a}{b}\pi}}{1 - e^{-\frac{2a}{b}\pi}} \\ &= \frac{b \left(1 + e^{\frac{a}{b}\pi} \right)}{(a^2 + b^2) \left(e^{\frac{a}{b}\pi} - 1 \right) \left(e^{\frac{a}{b}\pi} + 1 \right)} \\ &= \frac{b}{(a^2 + b^2) \left(e^{\frac{a}{b}\pi} - 1 \right)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{b}{(a^2 + b^2) \left(e^{\frac{a}{b}\pi} - 1 \right)}$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned}\{\alpha(t)\}^2 - \{\beta(t)\}^2 &= \left(\frac{e' + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e' - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

また

$$\begin{aligned}z &= \frac{ip\alpha(t) + \beta(t)}{ip\beta(t) + \alpha(t)} \\ &= \frac{\{ip\alpha(t) + \beta(t)\}\{-ip\beta(t) + \alpha(t)\}}{\{ip\beta(t) + \alpha(t)\}\{-ip\beta(t) + \alpha(t)\}} \\ &= \frac{p^2\alpha(t)\beta(t) + ip[\{\alpha(t)\}^2 - \{\beta(t)\}^2] + \alpha(t)\beta(t)}{p^2\{\beta(t)\}^2 + \{\alpha(t)\}^2}\end{aligned}$$

となる。 $\{\alpha(t)\}^2 - \{\beta(t)\}^2 = 1$ であることより

$$z = \frac{(p^2 + 1)\alpha(t)\beta(t) + ip}{p^2\{\beta(t)\}^2 + \{\alpha(t)\}^2}$$

となる。ここで $\alpha(t)$, $\beta(t)$, p は実数であるため

$$x = \frac{(p^2 + 1)\alpha(t)\beta(t)}{p^2\{\beta(t)\}^2 + \{\alpha(t)\}^2}, y = \frac{p}{p^2\{\beta(t)\}^2 + \{\alpha(t)\}^2}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}x &= \frac{(p^2 + 1)\alpha(t)\beta(t)}{p^2\{\beta(t)\}^2 + \{\alpha(t)\}^2} \\ &= \frac{(p^2 + 1)\left(\frac{e' + e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e' - e^{-t}}{2}\right)}{p^2\left(\frac{e' - e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e' + e^{-t}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{p^2(e^{2t} - 2 + e^{-2t}) + (e^{2t} + 2 + e^{-2t})} \\ &= \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)}\end{aligned}$$

となり、同様にして

$$y = \frac{4p}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)}, y = \frac{4p}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)}$$

(2)

$$\begin{aligned}x &= \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)} \\ &= \frac{(p^2 + 1)(1 - e^{-4t})}{(p^2 + 1)(1 + e^{-4t}) - 2(p^2 - 1)e^{-2t}}\end{aligned}$$

となるので $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-4t} = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(p^2 + 1)(1 - e^{-4t})}{(p^2 + 1)(1 + e^{-4t}) - 2(p^2 - 1)e^{-2t}} \\ &= \frac{(p^2 + 1)}{(p^2 + 1)} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}x &= \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)} \\ &= \frac{(p^2 + 1)(e^{4t} - 1)}{(p^2 + 1)(e^{4t} + 1) - 2(p^2 - 1)e^{2t}}\end{aligned}$$

となるので $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{4t} = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} x &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{(p^2 + 1)(e^{4t} - 1)}{(p^2 + 1)(e^{4t} + 1) - 2(p^2 - 1)e^{2t}} \\ &= \frac{(p^2 + 1)(-1)}{(p^2 + 1)} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x = 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} x = -1$$

(3)

$$x = \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)}, y = \frac{4p}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)} \text{ について, } p \neq 0 \text{ から } y \neq 0$$

となる。 $\alpha(t) = \frac{e' + e^{-t}}{2}$, $\beta(t) = \frac{e' - e^{-t}}{2}$ を用いて,

$$\begin{aligned}y &= \frac{4p}{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)} \\ \Leftrightarrow \{(p^2 + 1)(e^{2t} + e^{-2t}) - 2(p^2 - 1)\}y &= 4p \\ \Leftrightarrow (e^{2t} + e^{-2t}) &= \frac{4p + 2(p^2 - 1)y}{(p^2 + 1)y} \\ \Leftrightarrow \alpha(2t) &= \frac{2p + (p^2 - 1)y}{(p^2 + 1)y}\end{aligned}$$

となり、また $y \neq 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} &= \frac{(p^2 + 1)(e^{2t} - e^{-2t})}{4p} \\ \Leftrightarrow \beta(2t) &= \frac{2p}{p^2 + 1} \cdot \frac{x}{y}\end{aligned}$$

となる。 $\{\alpha(t)\}^2 - \{\beta(t)\}^2 = 1$ が成り立つので $\{\alpha(2t)\}^2 - \{\beta(2t)\}^2 = 1$ が成り立つ。よって

$$\left\{ \frac{2p + (p^2 - 1)y}{(p^2 + 1)y} \right\}^2 - \left\{ \frac{2p}{p^2 + 1} \cdot \frac{x}{y} \right\}^2 = 1$$

となる。よって求める関係式は、 $y \neq 0$ に注意して、

$$\begin{aligned}&\left\{ \frac{2p + (p^2 - 1)y}{(p^2 + 1)y} \right\}^2 - \left\{ \frac{2p}{p^2 + 1} \cdot \frac{x}{y} \right\}^2 = 1 \\ \Leftrightarrow 4p^2 + 4p(p^2 - 1)y + (p^2 - 1)^2 y^2 - 4p^2 x^2 &= (p^2 + 1)^2 y^2 \\ \Leftrightarrow 4p^2 x^2 + \left\{ (p^2 + 1)^2 - (p^2 - 1)^2 \right\} y^2 - 4p(p^2 - 1)y - 4p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4p^2 x^2 + 4p^2 y^2 - 4p(p^2 - 1)y - 4p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \left(p - \frac{1}{p} \right) y - 1 &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 - \left(p - \frac{1}{p} \right) y - 1 = 0$$