

〔Ⅰ〕

(1)

$$\begin{aligned}
 4\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0} \text{ より} \\
 4\overrightarrow{OC} + 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + 5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) &= \overrightarrow{0} \\
 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OC} &= 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} &= \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OC} &= \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{4} \\
 &= \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{5+3} \times 2
 \end{aligned}$$

となるので

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}}{8}$$

となる。これより

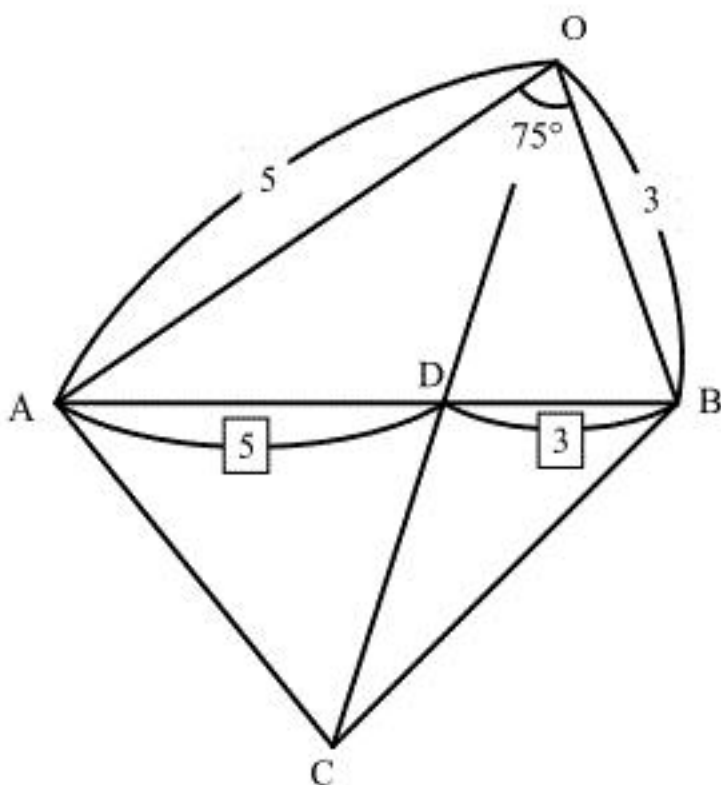
$$AD:DB = 5:3, OD:DC = 1:1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AD:DB = 5:3, OD:DC = 1:1$$

(3)

点 O, A, B, C, D を下図に示す。



$$\begin{aligned}
 \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\
 &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 45^\circ \sin 45^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
 \triangle OAB &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin 75^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{8}
 \end{aligned}$$

となる。(2)から $OD:DC = 1:1$ であるので

$$\triangle OAB : \triangle ACB = 1:1$$

となる。よって

$$(\text{四角形 OACB}) = 2 \triangle OAB = \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}$$

となる。次に(2)から $AD:DB = 5:3$ であるので

$$\triangle OAC : \triangle OBC = 5:3$$

となる。よって

$$\triangle OAC = \frac{5}{8} \cdot (\text{四角形 OACB}) = \frac{75(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{32}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 &(\text{答}) \quad \begin{array}{l} \text{四角形 OACB の面積} \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \\ \text{三角形 OAC の面積} \frac{75(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{32} \end{array}
 \end{aligned}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 3^n$ の両辺に底 3 の対数をとると

$$\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \log_3 3^n$$

$$\Leftrightarrow \log_3 a_{n+1} - 2\log_3 a_n = n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n = n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n + n \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $b_1 = \log_3 a_1 = 0$ であるため $b_2 = 2b_1 + 1 = 1$ となる。①から

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + (n+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、②-①から

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) + 1$$

$$\Leftrightarrow (b_{n+2} - b_{n+1} + 1) = 2(b_{n+1} - b_n + 1)$$

となる。よって数列 $\{b_{n+1} - b_n + 1\}$ は初項 $b_2 - b_1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列であるから、

$$b_{n+1} - b_n + 1 = 2^{n-1} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + 2^n - 1$$

となる。ここで左辺に①を代入すると

$$2b_n + n = b_n + 2^n - 1$$

$$\Leftrightarrow b_n = 2^n - n - 1$$

となる。

(答) $b_n = 2^n - n - 1$

(2)

$a_n \geq 10^{100}$ となるとき

$$\log_3 a_n \geq \log_3 10^{100}$$

$$\Leftrightarrow b_n \geq 100 \log_3 10$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} 100 \log_3 10 &= 100 \cdot \frac{1}{\log_{10} 3} \\ &= 100 \cdot \frac{1}{0.4771} \end{aligned}$$

$$\therefore 209 < 100 \log_3 10 < 210$$

である。また①から $b_{n+1} > b_n$ であり

$$b_7 = 2^7 - 7 - 1 = 120$$

$$b_8 = 2^8 - 8 - 1 = 247$$

であるため $b_n \geq 100 \log_3 10$ となる最小の n は

$$n = 8$$

となる。よって $a_n \geq 10^{100}$ となる最小の n も

$$n = 8$$

となる。

(答) $n = 8$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(\sqrt{2} + \sin x) - \cos x(\cos x)}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sqrt{2} \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{2} \sin x + 1}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \end{aligned}$$

となる。方程式 $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$ の解は $0 \leq x \leq 2\pi$ において

$$x = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

であり、 $(\sqrt{2} + \sin x)^2 > 0$ であることに注意すると $f(x)$ の増減表は下図の通りとなる。

x	0	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{7}{4}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $x = \frac{7}{4}\pi$ において最大値1となり $x = \frac{5}{4}\pi$ において最小値-1となることが分かる。

(答) 最大値1, 最小値-1

(2)

$(\sqrt{2} + \sin x)' = \cos x$ であることより

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{2} + \sin x} dx \\ &= \left[\log(\sin x + \sqrt{2}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log(1 + \sqrt{2}) - \log \sqrt{2} \\ &= \log \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\log \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\int (-e^{-x})' \sin x dx = -e^{-x} \sin x - \int \left\{ -e^{-x} (\sin x)' \right\} dx \text{ であることから}$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow I = J - e^{-x} \sin x \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$\text{となる。また } \int (-e^{-x})' \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int \left\{ -e^{-x} (\cos x)' \right\} dx \text{ であることから}$$

$$\int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow J = -I - e^{-x} \cos x \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。

(証明終)

(2)

C_1, C_2 を積分定数とする。① + ② より

$$I + J = J - I - (e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x)$$

$$\therefore I = -\frac{e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x}{2} + C_1$$

となる。また、① - ② より

$$I - J = J + I - e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

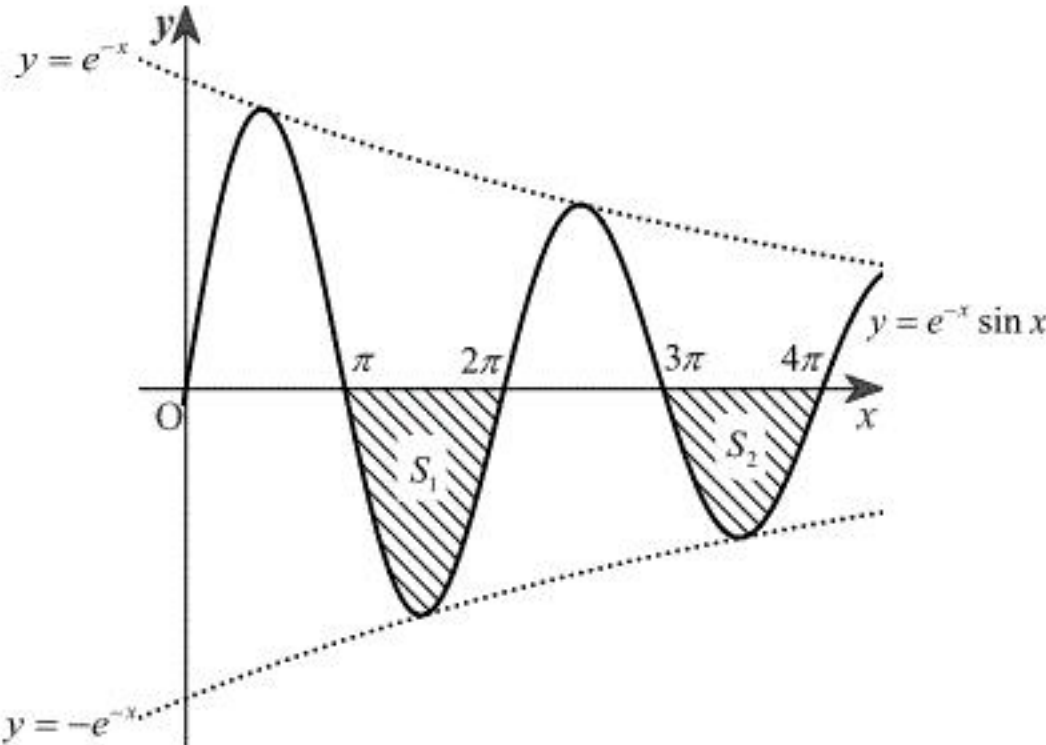
$$\therefore J = \frac{e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x}{2} + C_2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = -\frac{e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x}{2} + C_1, \quad J = \frac{e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x}{2} + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数})$$

(3)

$y = e^{-x} \sin x$ について $e^{-x} > 0$ であることから $\sin x \leq 0$ において $y \leq 0$ となる。図示すると以下のようなになる。



よって $y \leq 0$ となるとき自然数 k を用いると

$$(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$$

となる。よって

$$S_k = \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} (-e^{-x} \sin x) dx$$

となる。(2)の結果を用いると

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} (-e^{-x} \sin x) dx \\ &= \left[\frac{e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x}{2} \right]_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \\ &= \frac{1}{2} e^{-2k\pi} + \frac{1}{2} e^{-(2k-1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{\pi}) e^{-2k\pi} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = e^{-2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-2n\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

となり、 $e^{-2\pi} < e^0 = 1$ であるため

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} (1 + e^{\pi}) e^{-2k\pi} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 + e^{\pi}) \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{\pi}) \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \\ &= \frac{(1 + e^{\pi})}{2(e^{\pi} - 1)(e^{\pi} + 1)} \\ &= \frac{1}{2(e^{\pi} - 1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2(e^{\pi} - 1)}$$