

[I]

(1)

まず t の範囲を求める。 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから、相加・相乗平均の関係より、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

が成立する。等号が成立するのは $2^x = 2^{-x}$ 、つまり $x=0$ のときである。

$2^x + 2^{-x} = t$ の両辺を 2 乗すると、

$$4^x + 4^{-x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = t^2$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$$

とわかる。したがって与方程式にこれらの結果を代入することで、

$$2(t^2 - 2) - 9t + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 10 = 0$$

と t の満たすべき方程式が求められる。

$$(答) \quad 2t^2 - 9t + 10 = 0 \quad (t \geq 2)$$

(2)

(1)の結果より、

$$2t^2 - 9t + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 5)(t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, \frac{5}{2}$$

となる。これらは(1)で求めた t の範囲 $t \geq 2$ に含まれているため、適する。

$$(答) \quad t = 2, \frac{5}{2}$$

(3)

$t=2$ のとき、(1)で求めた等号成立条件より $x=0$ となる。 $t=\frac{5}{2}$ のとき、

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 1 = \frac{5}{2} \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2}, 2$$

$$\therefore x = -1, 1$$

となる。以上より、求める x の値は $x = -1, 0, 1$ である。

$$(答) \quad x = -1, 0, 1$$

〔Ⅱ〕

(1)

求める円の中心を点Cとおく。点Cは線分ABの垂直二等分線 $y=5$ 上に存在するから、その座標は $C(c, 5)$ とおける。点P, Aがともに円周上にあることから、 $AC=PC$ より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= PC^2 \\ \Leftrightarrow (c-0)^2 + (5-3)^2 &= (c-t)^2 + (5-0)^2 \\ \Leftrightarrow c^2 + 4 &= c^2 - 2tc + t^2 + 25 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{t^2 + 21}{2t} (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

と c を t を用いて表すことができる。よって、点Cの座標は $\left(\frac{t^2 + 21}{2t}, 5\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{t^2 + 21}{2t}, 5\right)$$

(2)

(1)で求めた円と x 軸が接するのは、円の中心Cと点Pの x 座標が一致、つまり $c=t$ が成り立つときである。よって、

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + 21}{2t} &= t \\ \Leftrightarrow t^2 &= 21 \\ \Leftrightarrow t &= \sqrt{21} (\because t > 0) \end{aligned}$$

と t が求められる。このときの円の半径は $CP=5$ であるから、求める円の方程式は

$$(x - \sqrt{21})^2 + (y - 5)^2 = 25$$

となる。

$$(\text{答}) (x - \sqrt{21})^2 + (y - 5)^2 = 25$$

(3)

円周角の定理より、 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$ が成り立つ。したがって、 $\angle APB$ が最大になるのは $\angle ACB$ が最大となるときである。点A, Bは定点であるから、点Cの x 座標 c が最小となるときに $\angle ACB$ は最大となる。ここで、(1)の結果より $c = \frac{t^2 + 21}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{21}{t} \right)$ である。 $t > 0, \frac{21}{t} > 0$ から、相加・相乗平均の関係より、

$$c \geq 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{t \cdot \frac{21}{t}} = \sqrt{21}$$

が成り立つ。等号成立条件は $t = \frac{21}{t}$ 、つまり $t = \sqrt{21} (\because t > 0)$ のときであり、このとき c の値は最小値 $\sqrt{21}$ となる。以上より、 $\angle APB$ の大きさが最大になるときの点Pの座標は $(\sqrt{21}, 0)$ である。

$$(\text{答}) P(\sqrt{21}, 0)$$

〔Ⅲ〕

(1)

半角の公式を用いると、 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 2x - a(4\cos^2 x - \cos 2x - 2) + b \\ &= 1 - \cos^2 2x - a\left(4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos 2x - 2\right) + b \\ &= -\cos^2 2x - a\cos 2x + b + 1 \\ &= -t^2 - at + b + 1 \end{aligned}$$

と t, a, b を用いて表すことができる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -t^2 - at + b + 1$$

(2)

$g(t) = -t^2 - at + b + 1$ とおく。 $t = \cos 2x$ より、全ての実数 x に対して t のとりうる値の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。よって求める範囲は、 $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で $-1 \leq g(t) \leq 3$ が成り立つような点 (a, b) の範囲、と言いかえることができる。 $g(t)$ は、

$$g(t) = -\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1$$

と平方完成できるから、 $y = g(t)$ のグラフは上に凸であり、軸は $t = -\frac{a}{2}$ である。以下、軸

$t = -\frac{a}{2}$ と範囲 $-1 \leq t \leq 1$ の位置関係によって場合分けを行う。

[1] $-\frac{a}{2} < -1$ 、つまり $a > 2$ のとき

$g(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で最大値 $g(-1) = a + b$ 、最小値 $g(1) = -a + b$ をとる。よって、

$$a + b \leq 3 \text{ かつ } -a + b \geq -1$$

$$\Leftrightarrow a - 1 \leq b \leq -a + 3$$

と a, b についての条件が求められる。

[2] $-1 \leq -\frac{a}{2} < 1$ 、つまり $-2 < a \leq 2$ のとき

$g(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で最大値 $g\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + b + 1$ をとる。題意より、

$$\frac{a^2}{4} + b + 1 \leq 3 \Leftrightarrow b \leq -\frac{a^2}{4} + 2$$

である。また、 $g(-1) = a + b$ か $g(1) = -a + b$ のどちらかが最小値となる。よって、

$$a \leq 0 \text{ のとき } b \leq -\frac{a^2}{4} + 2 \text{ かつ } a + b \geq -1$$

$$a > 0 \text{ のとき } b \leq -\frac{a^2}{4} + 2 \text{ かつ } -a + b \geq -1$$

と a, b についての条件が求められる。

[3] $1 \leq -\frac{a}{2}$ 、つまり $a \leq -2$ のとき

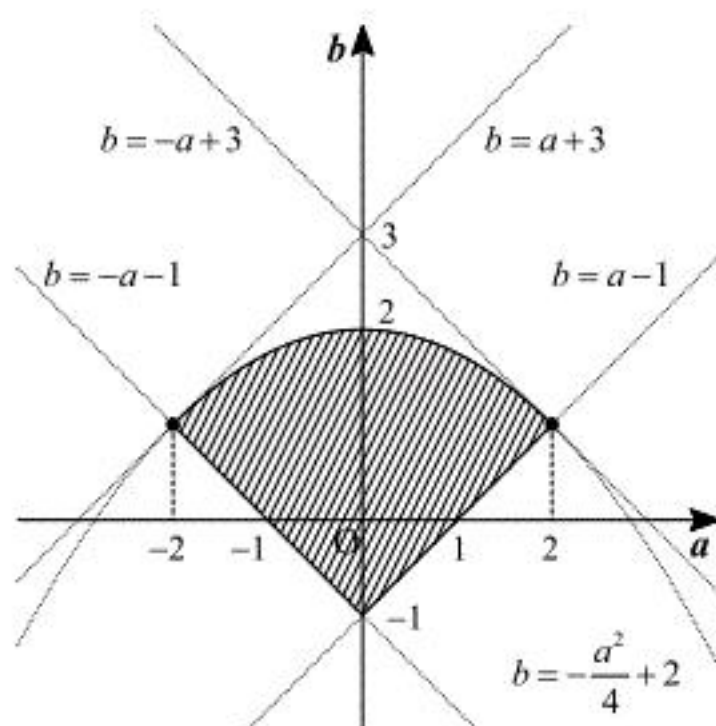
$g(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で最大値 $g(1) = -a + b$ 、最小値 $g(-1) = a + b$ をとる。よって、

$$-a + b \leq 3 \text{ かつ } a + b \geq -1$$

$$\Leftrightarrow -a - 1 \leq b \leq a + 3$$

と a, b についての条件が求められる。

以上[1], [2], [3]より、題意をみたす点 (a, b) の範囲は下図の通りとなる。ただし、すべての境界線を含む。



(答) 前図

〔IV〕

(1)

$n=2$ のとき、条件(ア)より $i_1 < i_2$ かつ $i_3 < i_4$ 、条件(イ)より $i_1 < i_3$ が成り立つ。よって $i_1=1$ であり、条件を満たす順列は $[1, 2, 3, 4], [1, 3, 2, 4], [1, 4, 2, 3]$ の3つとなるから、 $f(2)=3$ である。
 $n=3$ のとき、条件(ア)より $i_1 < i_2$ かつ $i_3 < i_4$ かつ $i_5 < i_6$ 、条件(イ)より $i_1 < i_3 < i_5$ が成り立つため、 $i_1=1$ とわかる。仮に $i_2=2$ とすると、 $i_3, \dots, i_6$ の選び方は $n=2$ の場合と同様に考えられることから、 $f(2)=3$ となる。 $i_2=3, 4, 5, 6$ の場合も同様であるから、条件を満たす順列は $3 \cdot 5=15$ 通り存在する。したがって $f(3)=15$ である。

(答) $f(2)=3, f(3)=15$

(2)

(1)と同様にして、条件(ア)および(イ)より $i_1=1$ とわかる。 i_2 の選び方は $2, 3, \dots, 2n$ のうちから1つ選ぶため $2n-1$ 通りであり、残る $i_3, i_4, \dots, i_{2n}$ の並べ方は $f(n-1)$ 通りとなる。よって、

$$f(n) = (2n-1)f(n-1)$$

という関係式が成り立つ。

(答) $f(n) = (2n-1)f(n-1)$

(3)

(2)の結果を用いると、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} f(n) &= (2n-1)f(n-1) \\ &= (2n-1)(2n-3)f(n-2) \\ &= (2n-1)(2n-3) \cdots 5 \cdot f(2) \\ &= (2n-1)(2n-3) \cdots 5 \cdot 3 \\ &= \frac{(2n)!}{(2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

と計算できる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(答) $f(n) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$