

[I]

(1)

半角の公式を用いると、 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 2x - a(4\cos^2 x - \cos 2x - 2) + b \\ &= 1 - \cos^2 2x - a\left(4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos 2x - 2\right) + b \\ &= -\cos^2 2x - a\cos 2x + b + 1 \\ &= -t^2 - at + b + 1 \end{aligned}$$

と t, a, b を用いて表すことができる。

(答) $f(x) = -t^2 - at + b + 1$

(2)

$g(t) = -t^2 - at + b + 1$ とおく。 $t = \cos 2x$ より、全ての実数 x に対して t のとりうる値の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。よって求める範囲は、 $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で $-1 \leq g(t) \leq 3$ が成り立つような点 (a, b) の範囲、と言いかえることができる。 $g(t)$ は、

$$g(t) = -\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1$$

と平方完成できるから、 $y = g(t)$ のグラフは上に凸であり、軸は $t = -\frac{a}{2}$ である。以下、軸

$t = -\frac{a}{2}$ と範囲 $-1 \leq t \leq 1$ の位置関係によって場合分けを行う。

[1] $-\frac{a}{2} < -1$, つまり $a > 2$ のとき

$g(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で最大値 $g(-1) = a + b$, 最小値 $g(1) = -a + b$ をとる。よって、
 $a + b \leq 3$ かつ $-a + b \geq -1$
 $\Leftrightarrow a - 1 \leq b \leq -a + 3$
 と a, b についての条件が求められる。ここで $a - 1 \leq -a + 3$ より $a \leq 2$ であるが、これは $a > 2$ と矛盾する。よってこの場合の領域は存在しない。

[2] $-1 \leq -\frac{a}{2} < 1$, つまり $-2 < a \leq 2$ のとき

$g(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で最大値 $g\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + b + 1$ をとる。題意より、

$$\frac{a^2}{4} + b + 1 \leq 3 \Leftrightarrow b \leq -\frac{a^2}{4} + 2$$

である。また、 $g(-1) = a + b$ か $g(1) = -a + b$ のどちらかが最小値となる。よって、

$$a \leq 0 \text{ のとき } b \leq -\frac{a^2}{4} + 2 \text{ かつ } a + b \geq -1$$

$$a > 0 \text{ のとき } b \leq -\frac{a^2}{4} + 2 \text{ かつ } -a + b \geq -1$$

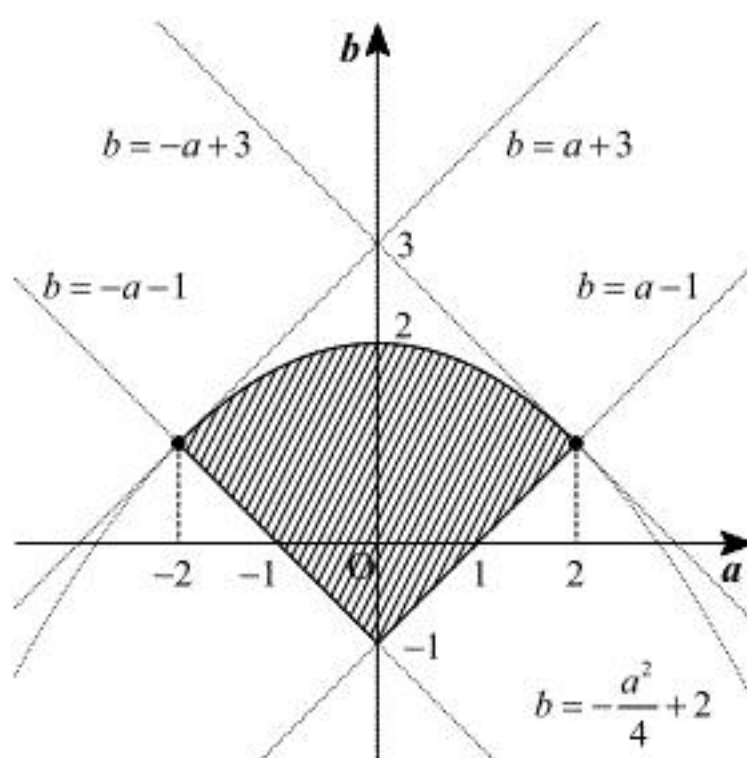
と a, b についての条件が求められる。

[3] $1 \leq -\frac{a}{2}$, つまり $a \leq -2$ のとき

$g(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で最大値 $g(1) = -a + b$, 最小値 $g(-1) = a + b$ をとる。よって、
 $-a + b \leq 3$ かつ $a + b \geq -1$
 $\Leftrightarrow -a - 1 \leq b \leq a + 3$

と a, b についての条件が求められる。ここで $-a - 1 \leq a + 3$ より $-2 \leq a$ であるが、これは $a \leq -2$ と矛盾する。よってこの場合の領域は存在しない。

以上[1], [2], [3]より、題意をみたす点 (a, b) の範囲は下図の通りとなる。ただし、すべての境界線を含む。



(答) 前図

〔Ⅱ〕

(1)

D_0 は点 P_0 と点 Q_0 の距離であるから,

$$D_0 = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad D_0 = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$$

(2)

$sR = A$ より,

$$\begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta \\ s \sin \theta & s \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

が成り立つ。両辺を比較すると、 $a = s \cos \theta$, $b = s \sin \theta$ がわかる。 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ にこれらを代入すると,

$$(s \cos \theta)^2 + (s \sin \theta)^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow s = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\because s > 0)$$

と s を a, b を用いて表せる。

$$(\text{答}) \quad s = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(3)

行列 A を $A = sR$ とみると、 $\overline{OP_0}, \overline{OQ_0}$ に対し s 倍の拡大と角度 θ の回転を与える行列とみなせる。したがって、 A^n の表す 1 次変換は s^n 倍の拡大と角度 $n\theta$ の回転を与えることがわかる。以上より,

$$\triangle OP_0Q_0 \sim \triangle OP_nQ_n$$

が成り立ち、相似比が $1:s^n$ となるから,

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{D_0} &= \frac{s^n}{1} \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{D_n}{D_0} = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n$$

〔Ⅲ〕

(1)

$1-x=t$ とおくと、 $-dx=dt$ となる。また積分範囲は、

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline t & 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となる。以上より、与式に置換積分を適用すると、

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_1^0 (1-t)^{p-1} \cdot t^{q-1} \cdot (-dt) \\ &= \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt \\ &= B(q, p) \end{aligned}$$

となることがわかる。

(証明終)

(2)

部分積分を用いると、

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_0^1 x^p \left\{ -\frac{1}{q} (1-x)^q \right\}' dx \\ &= -\frac{1}{q} \left[x^p (1-x)^q \right]_0^1 - \frac{1}{q} \int_0^1 p x^{p-1} \{ -(1-x)^q \} dx \\ &= \frac{p}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx \\ &= \frac{p}{q} B(p, q+1) \end{aligned}$$

と計算できる。よって、

$$B(p+1, q) = \frac{p}{q} B(p, q+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $B(p+1, q) + B(p, q+1)$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} B(p+1, q) + B(p, q+1) &= \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx + \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx \\ &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \{ x + (1-x) \} dx \\ &= B(p, q) \end{aligned}$$

とわかる。よって、

$$B(p+1, q) + B(p, q+1) = B(p, q) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②式に①式を代入して整理することにより、

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \frac{p}{p+q} B(p, q) \\ B(p, q+1) &= \frac{q}{p+q} B(p, q) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

(3)

(2)で得られた関係式を利用すると、

$$\begin{aligned} B(5, 4) &= B(5, 3+1) \\ &= \frac{3}{8} B(5, 2+1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} B(5, 1+1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} B(5, 1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $B(5, 1)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} B(5, 1) &= \int_0^1 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

とわかる。よって求める値は、

$$\begin{aligned} B(5, 4) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{280} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{280}$

〔Ⅳ〕

(1)

曲線 C の点 $P(a \cos t, b \sin t)$ における接線 ℓ の方程式は,

$$\begin{aligned}\ell: \frac{a \cos t}{a^2} x + \frac{b \sin t}{b^2} y &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos t}{a} x + \frac{\sin t}{b} y &= 1\end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \ell: \frac{\cos t}{a} x + \frac{\sin t}{b} y = 1$$

(2)

(1)と同様にして、接線 m の方程式は,

$$m: \frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y = 1$$

と求められる。 ℓ, m の式より、 $\left(\frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{b}\right), \left(\frac{\cos \theta}{a}, \frac{\sin \theta}{b}\right)$ はそれぞれ接線 ℓ, m の法線ベクトルとなる。 $\ell \perp m$ より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{b}\right) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{a}, \frac{\sin \theta}{b}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos t \cos \theta}{a^2} + \frac{\sin t \sin \theta}{b^2} &= 0\end{aligned}$$

となる。 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t > 0, \sin t > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\cos t \cos \theta}{a^2} + \frac{\sin t \sin \theta}{b^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{a^2 \sin t}{b^2 \cos t} \sin \theta \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ にこれを代入して、

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta \left\{ 1 + \left(-\frac{a^2 \sin t}{b^2 \cos t} \right)^2 \right\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta &= \frac{b^4 \cos^2 t}{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}\end{aligned}$$

とわかる。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \frac{b^2 \cos t}{\sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}}$$

と表せる。これを①式に代入して、

$$\cos \theta = -\frac{a^2 \sin t}{\sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}}$$

とわかる。以上より、接点 $Q(a \cos \theta, a \sin \theta)$ の座標は、

$$Q \left(-\frac{a^3 \sin t}{\sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}}, \frac{b^3 \cos t}{\sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}} \right)$$

と t, a, b を用いて表せる。また直線 m の方程式は、

$$\begin{aligned}m: \frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y &= 1 \\ \Leftrightarrow (-a \sin t) x + (b \cos t) y &= \sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}\end{aligned}$$

と求められる。

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad Q &\left(-\frac{a^3 \sin t}{\sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}}, \frac{b^3 \cos t}{\sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}} \right) \\ m: &-a \sin t \cdot x + b \cos t \cdot y = \sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t}\end{aligned}$$

(3)

点 R の座標を (X, Y) とおく。 ℓ, m の式にこれを代入すると、

$$\begin{cases} \frac{\cos t}{a} X + \frac{\sin t}{b} Y = 1 & \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \\ -a \sin t X + b \cos t Y = \sqrt{a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t} & \cdot \cdot \cdot \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。②の両辺を ab 倍し、その後②式、③式の両辺の平方をとると、

$$\begin{cases} (b \cos t)^2 X^2 + 2ab \sin t \cos t \cdot XY + (a \sin t)^2 Y^2 = a^2 b^2 \\ (-a \sin t)^2 X^2 - 2ab \sin t \cos t \cdot XY + (b \cos t)^2 Y^2 = a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t \end{cases}$$

となる。これらの両辺をそれぞれ足し合わせて計算すると、

$$\begin{aligned}(b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)(X^2 + Y^2) &= a^2 b^2 + a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t \\ \Leftrightarrow (b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)(X^2 + Y^2) &= (a^2 + b^2)(b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 &= a^2 + b^2 \quad (\because b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t > 0) \\ \Leftrightarrow \sqrt{X^2 + Y^2} &= \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

と線分 OR の長さを求められる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{a^2 + b^2}$$