

[I]

(1)

まず t の範囲を求める。 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから、相加・相乗平均の関係より、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

が成立する。等号が成立するのは $2^x = 2^{-x}$ 、つまり $x = 0$ のときである。

$2^x + 2^{-x} = t$ の両辺を 2 乗すると、

$$4^x + 4^{-x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = t^2$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$$

とわかる。したがって与方程式にこれらの結果を代入することで、

$$2(t^2 - 2) - 9t + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 10 = 0$$

と t の満たすべき方程式が求められる。

$$(答) \quad 2t^2 - 9t + 10 = 0 \quad (t \geq 2)$$

(2)

(1)の結果より、

$$2t^2 - 9t + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 5)(t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, \frac{5}{2}$$

となる。これらは(1)で求めた t の範囲 $t \geq 2$ に含まれているため、適する。

$$(答) \quad t = 2, \frac{5}{2}$$

(3)

$t = 2$ のとき、(1)で求めた等号成立条件より $x = 0$ となる。 $t = \frac{5}{2}$ のとき、

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 1 = \frac{5}{2} \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2}, 2$$

$$\therefore x = -1, 1$$

となる。以上より、求める x の値は $x = -1, 0, 1$ である。

$$(答) \quad x = -1, 0, 1$$

〔Ⅱ〕

(1)

D_0 は点 P_0 と点 Q_0 の距離であるから、

$$D_0 = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$$

と表せる。

$$(答) \quad D_0 = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$$

(2)

$sR = A$ より、

$$\begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta \\ s \sin \theta & s \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

が成り立つ。両辺を比較すると、 $a = s \cos \theta$, $b = s \sin \theta$ がわかる。 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ にこれらを代入すると、

$$(s \cos \theta)^2 + (s \sin \theta)^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow s = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\because s > 0)$$

と s を a, b を用いて表せる。

$$(答) \quad s = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(3)

行列 A を $A = sR$ とみると、 $\overline{OP_0}, \overline{OQ_0}$ に対し s 倍の拡大と角度 θ の回転を与える行列とみなせる。したがって、 A^n の表す 1 次変換は s^n 倍の拡大と角度 $n\theta$ の回転を与えることがわかる。以上より、

$$\triangle OP_0Q_0 \sim \triangle OP_nQ_n$$

が成り立ち、相似比が $1:s^n$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{D_0} &= \frac{s^n}{1} \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \end{aligned}$$

とわかる。

$$(答) \quad \frac{D_n}{D_0} = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n$$

〔Ⅲ〕

(1)

$1-x=t$ とおくと, $-dx=dt$ となる。また積分範囲は,

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline t & & 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となる。以上より, 与式に置換積分を適用すると,

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_1^0 (1-t)^{p-1} \cdot t^{q-1} \cdot (-dt) \\ &= \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt \\ &= B(q, p) \end{aligned}$$

となることがわかる。

(証明終)

(2)

$p > 0, q > 0$ に注意して部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} B(p, q+1) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{p} x^p \right\}' (1-x)^q dx \\ &= \frac{1}{p} \left[x^p (1-x)^q \right]_0^1 - \frac{1}{p} \int_0^1 x^p \left\{ -q(1-x)^{q-1} \right\} dx \\ &= \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q}{p} B(p+1, q) \end{aligned}$$

と計算できる。よって,

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また, $B(p+1, q) + B(p, q+1)$ を計算してみると,

$$\begin{aligned} B(p+1, q) + B(p, q+1) &= \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx + \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx \\ &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \{x + (1-x)\} dx \\ &= B(p, q) \end{aligned}$$

とわかる。よって,

$$B(p+1, q) + B(p, q+1) = B(p, q) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)の②式に①式を代入して整理することにより,

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \frac{p}{p+q} B(p, q) \\ B(p, q+1) &= \frac{q}{p+q} B(p, q) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

(4)

(3)で得られた関係式を利用すると,

$$\begin{aligned} B(5, 4) &= B(5, 3+1) \\ &= \frac{3}{8} B(5, 2+1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} B(5, 1+1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} B(5, 1) \end{aligned}$$

となる。ここで, $B(5, 1)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} B(5, 1) &= \int_0^1 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

とわかる。よって求める値は,

$$\begin{aligned} B(5, 4) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{280} \end{aligned}$$

である。

[IV]

(1)

与関係式に $\theta = 0$ を代入して、

$$\frac{x^2}{(\cos 0 + 2)^2} + \frac{y^2}{(\sin 0 + 3)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

と整理できる。P(0)は第一象限に存在するから、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ として、 $x = 3 \cos \alpha$, $y = 3 \sin \alpha$

とおける。積 xy を計算すると、

$$xy = (3 \cos \alpha)(3 \sin \alpha)$$

$$= \frac{9}{2} \sin 2\alpha$$

となる。 $0 \leq 2\alpha \leq \pi$ より $\sin 2\alpha$ は $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値1をとるから、P(0)の座標は

$$\left(3 \cos \frac{\pi}{4}, 3 \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ とわかる。}$$

$$(\text{答}) \text{ P}(0) \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2)

与関係式を楕円の方程式とみて、 $x = (\cos \theta + 2) \cos \alpha$, $y = (\sin \theta + 3) \sin \alpha$ とおく。ただし $0 \leq$

$\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ とする。積 xy を計算すると、

$$xy = (\cos \theta + 2)(\sin \theta + 3) \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= \frac{(\cos \theta + 2)(\sin \theta + 3)}{2} \sin 2\alpha$$

とできる。(1)と同様に、これは $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき最大となるから、 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta + 2)$,

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + 3)$ となる。 $\cos \theta$, $\sin \theta$ について整理すると、

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}x - 2 \\ \sin \theta = \sqrt{2}y - 3 \end{cases}$$

となり、これを $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると、

$$(\sqrt{2}y - 3)^2 + (\sqrt{2}x - 2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

と軌跡の方程式が求められる。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq \sin \theta \leq 1$, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ だから、

$\sqrt{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$ となる。

$$(\text{答}) \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ ただし } \sqrt{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$$