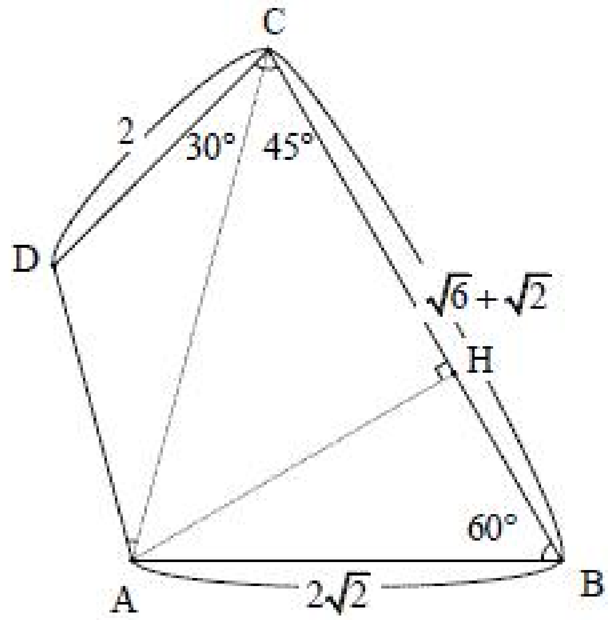
〔Ⅰ〕



上図のように点Aから辺BCに垂線をおろし，その足をHとする。$\angle B=60°$ であるから

$$BH = AB\cos 60° = \sqrt{2}$$

$$AH = AB\sin 60° = \sqrt{6}$$

$$CH = BC - BH = \sqrt{6} = AH$$

となる。よって△AHCは直角二等辺三角形である。ここから

$$\angle ACD = 30°$$

$$AC = 2\sqrt{3}$$

となるので，求める面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2}\times BC\times AH + \frac{1}{2}\times AC\times CD\sin 30°$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{6} + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 3+2\sqrt{3}$$

となる。

(答) $3+2\sqrt{3}$

〔Ⅱ〕

(1)

1の位が2, 4であるとき2の倍数となる。よって求める個数は

$$4^4\times 2=512$$

となる。

(答) 512個

(2)

9の倍数となるのは，各桁の数字の和が9の倍数となるときである。和が9の倍数となる5つの数字の組は

$$(1,1,1,2,4),\ (1,1,1,3,3),\ (1,1,2,2,3),\ (1,2,2,2,2),$$
$$(2,4,4,4,4),\ (3,3,4,4,4)$$

の6個であるから，求める個数は

$$\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!2!}=20+10+30+5+5+10$$
$$=80$$

となる。

(答) 80個

(3)

[1] 万の位が3または4のとき

このとき1～4桁目の数字が何であっても22000より大きくなる。この場合の数は

$$2\times 4^4=512$$

である。

[2] 万の位が2のとき

このとき千の位の数字が2以上であれば22000より大きくなる。この場合の数は

$$3\times 4^3=192$$

となる。

以上[1], [2]より求める個数は

$$512+192=704$$

となる。

(答) 704個

〔Ⅲ〕

(1)

直線OHは直線AB, ACに垂直であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -s\left|\vec{a}\right|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-u\vec{a}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{b}\right|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$
$$\Leftrightarrow -2s+3t+u=0 \qquad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -s\left|\vec{a}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+(s-u)\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}+u\left|\vec{c}\right|^2=0$$
$$\Leftrightarrow -2s+t+4u=0 \qquad \cdots ②$$

となる。また, 点Hは平面ABC上にあるから,

$$s+t+u=1 \qquad \cdots ③$$

となる。以上①, ②, ③を解いて

$$(s,t,u)=\left(\frac{11}{21},\frac{2}{7},\frac{4}{21}\right)$$

となる。

(答) $(s,t,u)=\left(\frac{11}{21},\frac{2}{7},\frac{4}{21}\right)$

(2)

(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$
$$=-\frac{10}{21}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{4}{21}\vec{c}$$
$$=\frac{2}{7}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{4}{21}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$$
$$=\frac{10}{21}\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

となる。よってPは線分BCを2:3に内分する点であるから

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=2:3$$

となる。

(答) BP : PC = 2 : 3

(3)

(2)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

であるから,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\frac{1}{25}\left|3\vec{b}+2\vec{c}-5\vec{a}\right|^2$$
$$=\frac{1}{25}\left(25\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2+4\left|\vec{c}\right|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}-20\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$
$$=\frac{105}{25}$$
$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\frac{\sqrt{105}}{5}\ \left(\because\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|>0\right)$$

となる。

〔IV〕

(1)

$$5!+4!+3!=120+24+6$$
$$=150$$

となる。

(答) 150

(2)

$a \geqq 4$ のとき，自然数 n を用いて

$$a!=n\cdot 4!$$
$$=24n$$

となるから

$$a!+2=2(12n+1)$$

となる。ここで $12n+1$ は13以上の奇数であるから，$a!+2$ は2以外の約数を持つ。よって $a!+2$ は2の累乗とはなりえず，題意は示された。

(証明終)

(3)

$a \geqq 6$ のとき，自然数 n を用いて

$$a!=n\cdot 6!$$
$$=720n$$

となるから

$$\frac{a!}{2}+4=4(90n+1)$$

となる。ここで $90n+1$ は91以上の奇数であるから，$\frac{a!}{2}+4$ は2以外の約数を持つ。よって $a!+2$ は2の累乗とはなりえず，題意は示された。

(証明終)

(4)

自然数 n を用いて

$$a!+b!+c!=2^n$$

を満たす正の整数 (a, b, c) の組を求めればよい。$c \geqq 3$ のとき，$a!+b!+c!$ は3の倍数となってしまうため不適である。よって $c=1, 2$ である。

[1] $c=1$ のとき

$$a!+b!=2^n-1$$

であるから右辺は奇数となり，$b=1$ である。このとき

$$a!+2=2^n$$

となり，(2)より $a \leqq 3$ である。ここで

$$2!+1!+1!=2^2$$
$$3!+1!+1!=2^3$$

となるから，$(a, b, c)=(2, 1, 1), (3, 1, 1)$ が適する。

[2] $c=2$ のとき

$$a!+b!+2!=2^n$$
$$\Leftrightarrow \frac{a!}{2}+\frac{b!}{2}=2^{n-1}-1$$

となり右辺は奇数であるが，$b \geqq 4$ のとき左辺は偶数となってしまうので $b=2, 3$ である。

$b=2$ のとき

$$a!+b!+2!=2^n$$
$$\Leftrightarrow \frac{a!}{4}=2^{n-2}-1$$

となり右辺は奇数であるが，$\frac{a!}{4}$ が奇数となるような自然数 a は存在しないので不適である。また，$b=3$ のとき

$$a!+b!+2!=2^n$$
$$\Leftrightarrow a!+8=2^n$$
$$\Leftrightarrow \frac{a!}{2}+4=2^{n-1}$$

となり，(3)より $a=3, 4, 5$ である。

$$\begin{cases} 3!+3!+2!=14 \\ 4!+3!+2!=32=2^5 \\ 5!+3!+2!=128=2^7 \end{cases}$$

となるから，$(a, b, c)=(4, 3, 2), (5, 3, 2)$ が適する。

以上[1], [2]より，$(a, b, c)=(2, 1, 1), (3, 1, 1), (4, 3, 2), (5, 3, 2)$ が求める組である。

(答) $(a, b, c)=(2, 1, 1), (3, 1, 1), (4, 3, 2), (5, 3, 2)$