〔 I 〕

(1)

(a)

1の位に2, 4であるとき2の倍数となる。よって求める個数は

$$4^4\times 2=512$$

となる。

(答) 512 個

(b)

9の倍数となるのは，各桁の数字の和が9の倍数となるときである。和が9の倍数となる5つの数字の組は

$$(1,1,1,2,4),\ (1,1,1,3,3),\ (1,1,2,2,3),\ (1,2,2,2,2),$$
$$(2,4,4,4,4),\ (3,3,4,4,4)$$

の6個であるから，求める個数は

$$\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!2!}=20+10+30+5+5+10$$
$$=80$$

となる。

(答) 80 個

(c)

[1] 万の位が3または4のとき

このとき1～4桁目の数字が何であっても22000より大きくなる。この場合の数は

$$2\times 4^4=512$$

である。

[2] 万の位が2のとき

このとき千の位の数字が2以上であれば22000より大きくなる。この場合の数は

$$3\times 4^3=192$$

となる。

以上[1], [2]より求める個数は

$$512+192=704$$

となる。

(答) 704 個

(2)

任意の m, n の組み合わせの数は

$$\left(4^5\right)^2=2^{20}$$

となる。このうち $m=n$ となるのは

$$4^5=1024$$

であるから，$m>n$ となる組の数は $m<n$ となる組の数と等しいことに注意すると

$$\frac{2^{20}-1024}{2}=2^{19}-512$$

となる。よって求める組み合わせの数は

$$\begin{aligned}2^{19}-512+1024&=2^{19}+512\\&=512\cdot 2^{10}+512\\&=512\cdot 1025\\&=524800\end{aligned}$$

となる。

(答) 524800 個

〔Ⅱ〕

(1)

直線 OH は直線 AB, AC に垂直であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -s\left|\vec{a}\right|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-u\vec{a}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{b}\right|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$
$$\Leftrightarrow -2s+3t+u=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -s\left|\vec{a}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+(s-u)\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}+u\left|\vec{c}\right|^2=0$$
$$\Leftrightarrow -2s+t+4u=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。また, 点 H は平面 ABC 上にあるから,

$$s+t+u=1 \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

となる。以上①, ②, ③を解いて

$$(s,\ t,\ u)=\left(\frac{11}{21},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{21}\right)$$

となる。

(答) $(s,\ t,\ u)=\left(\frac{11}{21},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{21}\right)$

(2)

(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$
$$=-\frac{10}{21}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{4}{21}\vec{c}$$
$$=\frac{2}{7}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{4}{21}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$$
$$=\frac{10}{21}\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

となる。よって P は線分 BC を 2:3 に内分する点であるから

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=2:3$$

となる。

(答) BP : PC = 2 : 3

(3)

(2)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

であるから,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\frac{1}{25}\left|3\vec{b}+2\vec{c}-5\vec{a}\right|^2$$
$$=\frac{1}{25}\left(25\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2+4\left|\vec{c}\right|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}-20\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$
$$=\frac{105}{25}$$
$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\frac{\sqrt{105}}{5}\ \left(\because\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|>0\right)$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{105}}{5}$

〔Ⅲ〕

(1)

C_1について

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

であるから，L_1の方程式は

$$y = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)+\sqrt{a}$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{2}\ (\because a>0)$$

となる。

(答)　$y = \dfrac{x}{2\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

(2)

C_2について

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

であるから，$x=b\ (b>0)$におけるC_2の接線の傾きは

$$-\frac{1}{b^2}$$

となる。これがL_1と直交するとき

$$-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}} = -1$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}}\ (\because a,\ b>0)$$

となる。よってL_2の方程式は

$$y = -2\sqrt{a}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}}\right)+\sqrt{2\sqrt{a}}$$
$$= -2\sqrt{a}x+2\sqrt{2\sqrt{a}}$$

となる。

(答)　$y=-2\sqrt{a}x+2\sqrt{2\sqrt{a}}$

(3)

$L_2: y=-2\sqrt{a}x+2\sqrt{2\sqrt{a}}$ は $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ 2\sqrt{2\sqrt{a}}\right)$ でx軸，y軸と交わるから，

$$l = 2\sqrt{2\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}}$$

となる。$\sqrt{2\sqrt{a}}>0$ であるから相加相乗平均の関係式より

$$l \geqq 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}}} = 4$$

となる。等号は

$$2\sqrt{2\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a} = 1$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

のとき成り立つから，このときlは最小値4をとる。

(答)　最小値: $4\left(a=\dfrac{1}{4}\right)$

〔IV〕

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1+\int_0^x (x-t) f(t)\,dt \\
&= 1+x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) \\
&= \int_0^x f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$\therefore f''(x)=f(x)$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} &= \frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)} \\
&= \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+f'(x)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となる。

(答) 1

(2)

(1)より A, C を積分定数として

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx=\int dx$$

$$\Leftrightarrow \log|\phi(x)|=x+C$$

$$\Leftrightarrow \phi(x)=\pm e^{x+C}$$

$$\therefore \phi(x)=Ae^x \quad (\text{ただし } A\neq 0)$$

となる。$f(0)=1,\ f'(0)=0$ から $\phi(0)=1$ となるので，$A=1$ となり，

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x)+f'(x) \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

となる。ここから，C' を積分定数として

$$
\begin{aligned}
\{e^x f(x)\}' &= e^x\{f(x)+f'(x)\} \\
&= e^x\phi(x) \\
&= e^{2x}
\end{aligned}
$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x+C'e^{-x}$$

となる。$f(0)=1$ から $C'=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$$

となる。

(答) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{-x}$