

〔I〕

(1)

1の位に2, 4が来るとき2の倍数となる。よって求める個数は

$$4^4 \times 2 = 512$$

となる。

(答) 512個

(2)

9の倍数となるのは、各桁の数字の和が9の倍数となるときである。和が9の倍数となる5つの数字の組は

$$(1, 1, 1, 2, 4), (1, 1, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2), \\ (2, 4, 4, 4, 4), (3, 3, 4, 4, 4)$$

の6個であるから、求める個数は

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!2!} + \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!2!} = 20 + 10 + 30 + 5 + 5 + 10 \\ = 80$$

となる。

(答) 80個

(3)

[1] 万の位が3または4のとき

このとき1~4桁目の数字が何であっても22000より大きくなる。この場合の数は

$$2 \times 4^4 = 512$$

である。

[2] 万の位が2のとき

このとき千の位の数字が2以上であれば22000より大きくなる。この場合の数は

$$3 \times 4^3 = 192$$

となる。

以上[1], [2]より求める個数は

$$512 + 192 = 704$$

となる。

(答) 704個

【Ⅱ】

(1)

直線 OH は直線 AB, AC に垂直であるから,

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s|\vec{a}|^2 + (s-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - u\vec{a} \cdot \vec{c} + t|\vec{b}|^2 + u\vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2s + 3t + u &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s|\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} + (s-u)\vec{a} \cdot \vec{c} + t\vec{b} \cdot \vec{c} + u|\vec{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2s + t + 4u &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。また、点 H は平面 ABC 上にあるから,

$$s + t + u = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。以上①, ②, ③を解いて

$$(s, t, u) = \left(\frac{11}{21}, \frac{2}{7}, \frac{4}{21} \right)$$

となる。

(答) $(s, t, u) = \left(\frac{11}{21}, \frac{2}{7}, \frac{4}{21} \right)$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{OH} - \overline{OA} \\ &= (s-1)\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \\ &= -\frac{10}{21}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{4}{21}\vec{c} \\ &= \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{4}{21}(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{10}{21} \times \frac{3\overline{AB} + 2\overline{AC}}{5} \end{aligned}$$

となる。よって P は線分 BC を 2:3 に内分する点であるから

$$BP : PC = 2 : 3$$

となる。

(答) $BP : PC = 2 : 3$

(3)

(2)より

$$\overline{AP} = \frac{3\overline{AB} + 2\overline{AC}}{5}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overline{AP}|^2 &= \frac{1}{25} |3\vec{b} + 2\vec{c} - 5\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{25} (25|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{c} - 20\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{105}{25} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{AP}| = \frac{\sqrt{105}}{5} \quad (\because |\overline{AP}| > 0)$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{105}}{5}$

〔Ⅲ〕

(1)

C_1 について

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

であるから、 L_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \sqrt{a} \\ &= \frac{x}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad y = \frac{x}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{2}$$

(2)

C_2 について

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

であるから、 $x=b$ ($b>0$)における C_2 の接線の傾きは

$$-\frac{1}{b^2}$$

となる。これが L_1 と直交するとき

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} &= -1 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}} \quad (\because a, b > 0) \end{aligned}$$

となる。よって L_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2\sqrt{a} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}} \right) + \sqrt{2\sqrt{a}} \\ &= -2\sqrt{ax} + 2\sqrt{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad y = -2\sqrt{ax} + 2\sqrt{2\sqrt{a}}$$

(3)

$L_2: y = -2\sqrt{ax} + 2\sqrt{2\sqrt{a}}$ は $A\left(\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}}, 0\right)$, $B(0, 2\sqrt{2\sqrt{a}})$ で x 軸, y 軸と交わるから、

$$l = 2\sqrt{2\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}}$$

となる。 $\sqrt{2\sqrt{a}} > 0$ であるから相加相乗平均の関係式より

$$l \geq 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}}} = 4$$

となる。等号は

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2\sqrt{a}} &= \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{a}}} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{a} &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

のとき成り立つから、このとき l は最小値4をとる。

$$(答) \quad \text{最小値: } 4 \left(a = \frac{1}{4} \right)$$

[IV]

(1)

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に注意すると

$$\cos x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 - 2 \sin x) = 0$$

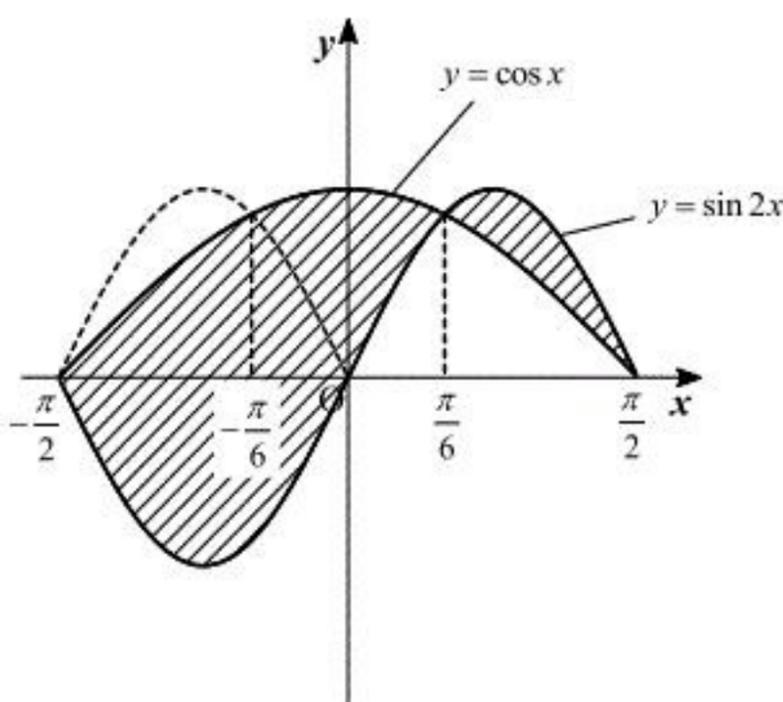
$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ または } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

となる。

(答) $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

(2)



(1)より、上図斜線部の領域を x 軸周りに1回転させた立体の体積を求めればよい。よって

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx + \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^2 dx - \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx$$

となる。ここで C_1, C_2 を積分定数とすると

$$\begin{aligned} \int \sin^2 2x dx &= \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx + \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^2 dx - \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} + \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &\quad - \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi^2}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$