

〔I〕

$x < x+1 < x+2$ であることに注意する。辺の長さはすべて正であるという条件より、

$$x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、三角不等式より

$$\begin{aligned} x+2 &< x+x+1 \\ \Leftrightarrow x &> 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、鈍角三角形となる条件は

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &< (x+2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-3) &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 < x < 3 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。以上①～③より、求める条件は

$$1 < x < 3$$

となる。

(答) $1 < x < 3$

〔Ⅱ〕

(1)

11個の玉をそれぞれ区別して考える。玉の取り出し方の総数は

$$11! \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしい。最初に赤玉が連続して4個出て、かつ最後に赤玉が出る場合の数は

$${}_5P_4 \times 6! \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{{}_5P_4 \times 6!}{11!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{462}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{462}$$

(2)

白玉と赤玉が交互に出るのは、最初に白玉を引き、その後は白玉と赤玉を交互に引き、最後に白玉を引くような場合である。この場合の数は

$$6 \times 5! \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{6 \times 5!}{11!} = \frac{1}{462}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{462}$$

(3)

玉の取り出し方の総数は

$${}_{11}C_5 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしい。もらった金額の合計額が支払った金額の合計額を上回る事象の余事象は、[1]赤玉4個白玉1個または、[2]赤玉5個を引く事象である。[1]の場合の数は

$${}_5C_4 \times {}_6C_1 = 30 \text{ (通り)}$$

であり、[2]の場合の数は

$${}_5C_5 = 1 \text{ (通り)}$$

である。よって求める確率は

$$1 - \frac{30+1}{{}_{11}C_5} = \frac{431}{462}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{431}{462}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\
&= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\
&= \frac{1}{3}n\{2(2n^2 + 3n + 1) - 6(n+1) + 3\} \\
&= \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) \\
&= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

(2)

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=1}^n (2k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n 4k^2 \\
&= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

であるから、 $\{a_n - b_n\}$ の第 n 項を n を用いて表すと

$$\begin{aligned}
a_n - b_n &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{3}n(2n+1)\{2n-1-2(n+1)\} \\
&= -n(2n+1)
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -n(2n+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}
c_n &= a_{n+1} - b_n \\
&= a_n - b_n + (2n+1)^2 \\
&= -n(2n+1) + (2n+1)^2 \\
&= (-n+2n+1)(2n+1) \\
&= (n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
c_n &> 100(n+1) \\
&\Leftrightarrow (2n+1)(n+1) > 100(n+1) \\
&\Leftrightarrow 2n+1 > 100 \\
&\Leftrightarrow n > \frac{99}{2} = 49.5
\end{aligned}$$

を得る。よって、 $c_n > 100(n+1)$ となる最小の n は 50 である。

〔Ⅳ〕

(1)

直線 ℓ の方程式は $kx - y + 2k = 0$ であるから、点 $A(0, 1)$ との距離 d は

$$d = \frac{|k \cdot 0 - 1 + 2k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

となる。

(答) $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$

(2)

円 C について

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

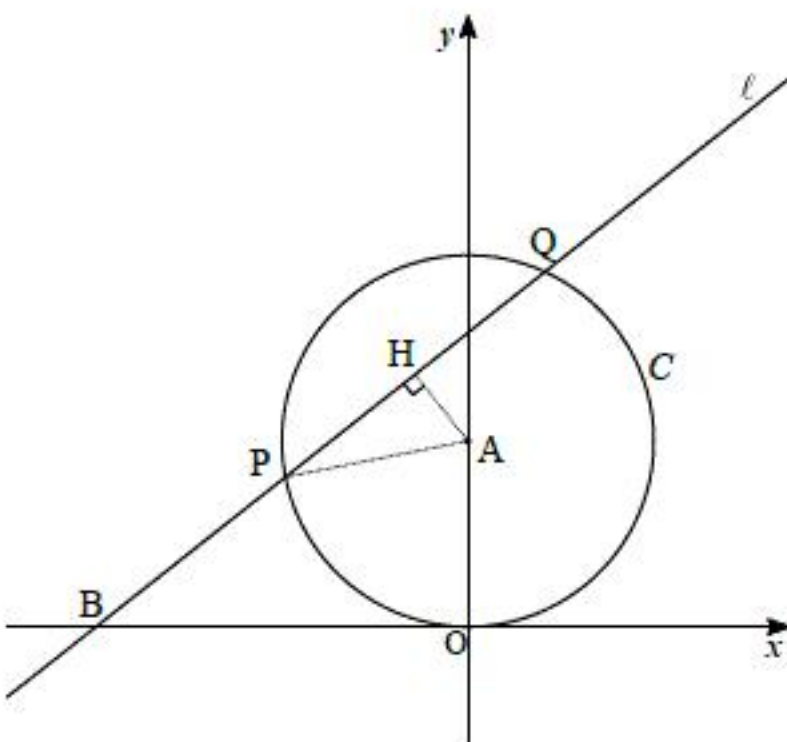
であるから、円 C は中心 A 、半径 1 の円となる。よって直線 ℓ と円 C が異なる 2 点で交わるのは、直線 ℓ と点 A の距離 d が 1 より小さいときである。したがって

$$\begin{aligned} d = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} &< 1 \\ \Leftrightarrow |2k - 1| &< \sqrt{k^2 + 1} \\ \Leftrightarrow |2k - 1|^2 &< k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 4k &< 0 \\ \Leftrightarrow k(3k - 4) &< 0 \\ \therefore 0 < k &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $0 < k < \frac{4}{3}$

(3)



上図のように、点 A から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

$$\begin{aligned} PH &= \frac{1}{2}PQ = \sqrt{k} \\ AH = d &= \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ AP &= 1 \end{aligned}$$

となるから、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AP^2 &= PH^2 + AH^2 \\ \Leftrightarrow 1^2 &= (\sqrt{k})^2 + \left(\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= k + \frac{4k^2 - 4k + 1}{k^2 + 1} \\ \Leftrightarrow k^2 + 1 &= k(k^2 + 1) + 4k^2 - 4k + 1 \quad (\because k^2 + 1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 - 3k &= 0 \\ \Leftrightarrow k(k^2 + 3k - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k = 0, \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

を得る。(2)より、 $0 < k < \frac{4}{3}$ であるから

$$k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$$

となる。

(答) $k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$

(4)

直線 ℓ と x 軸のなす角を α 、直線 AB と x 軸のなす角を β とおくと

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ \tan \beta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} > \frac{1}{2}$$

が成り立つから、 $\alpha > \beta$ であり、したがって $\theta = \alpha - \beta$ となる。よって

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}} \\ &= \frac{-8 + 2\sqrt{21}}{1 + \sqrt{21}} \\ &= \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$