

〔Ⅰ〕

(1)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\
 &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\
 &= \frac{1}{3}n\{2(2n^2 + 3n + 1) - 6(n+1) + 3\} \\
 &= \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) \\
 &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

(2)

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{k=1}^n (2k)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n 4k^2 \\
 &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

であるから、 $\{a_n - b_n\}$ の第 n 項を n を用いて表すと

$$\begin{aligned}
 a_n - b_n &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{1}{3}n(2n+1)\{2n-1-2(n+1)\} \\
 &= -n(2n+1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -n(2n+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}
 c_n &= a_{n+1} - b_n \\
 &= a_n - b_n + (2n+1)^2 \\
 &= -n(2n+1) + (4n^2 + 4n + 1) \\
 &= (2n^2 + 3n + 1) \\
 &= (n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

となる。よって $(n+1)(2n+1)$ が 6 の倍数となるような n の条件を求めればよい。 $2n+1$ は奇数であるから、 $(n+1)(2n+1)$ が 6 の倍数のとき $n+1$ は偶数である。よって求める条件は

$$n+1 \text{ が偶数かつ } 3 \text{ の倍数} \quad \dots \textcircled{1}$$

または

$$n+1 \text{ が偶数 かつ } 2n+1 \text{ が } 3 \text{ の倍数} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①は

$$\begin{aligned}
 &n+1 \text{ が } 6 \text{ の倍数} \\
 &\Leftrightarrow n \text{ を } 6 \text{ で割った余りは } 5 \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

となる。②について、 $2n+1$ は奇数であるから、 $2n+1$ が 3 の倍数のとき自然数 k を用いると

$$\begin{aligned}
 2n+1 &= 3(2k-1) \\
 \Leftrightarrow 2n+1 &= 6k-3 \\
 \Leftrightarrow n &= 3k-2
 \end{aligned}$$

となる。また、 $n+1$ は偶数であるから

$$n+1 = 3k-1$$

も偶数である。よって k は奇数であるから、自然数 l を用いて $k = 2l-1$ と表されるので

$$\begin{aligned}
 n+1 &= 3 \cdot (2l-1) - 1 \\
 \Leftrightarrow n &= 6l-5 \\
 \Leftrightarrow n \text{ を } 6 \text{ で割った余りは } 1 \quad \dots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

となる。よって③、④より求める条件は

$$n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 1 \text{ または } 5$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 1 \text{ または } 5$$

〔Ⅱ〕

(1)

直線 ℓ の方程式は $kx - y + 2k = 0$ であるから、点 $A(0, 1)$ との距離 d は

$$d = \frac{|k \cdot 0 - 1 + 2k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

となる。

(答) $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$

(2)

円 C について

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

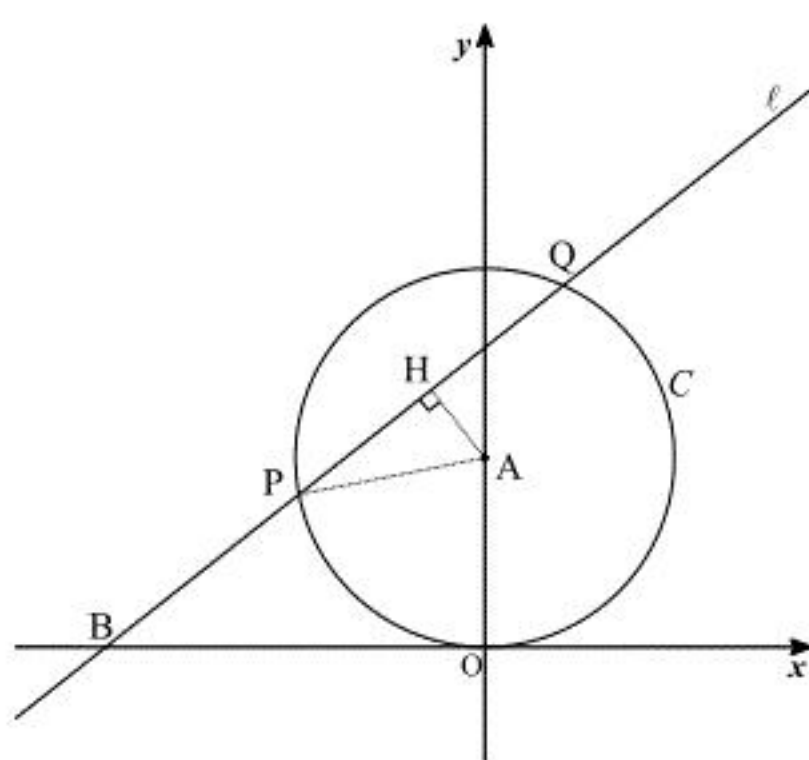
であるから、円 C は中心 A 、半径 1 の円となる。よって直線 ℓ と円 C が異なる 2 点で交わるのは、直線 ℓ と点 A の距離 d が 1 より小さいときである。したがって

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 1 \\ \Leftrightarrow |2k - 1| &< \sqrt{k^2 + 1} \\ \Leftrightarrow |2k - 1|^2 &< k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 4k &< 0 \\ \Leftrightarrow k(3k - 4) &< 0 \\ \therefore 0 < k &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $0 < k < \frac{4}{3}$

(3)



上図のように、点 A から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

$$\begin{aligned} PH &= \frac{1}{2}PQ = \sqrt{k} \\ AH &= d = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ AP &= 1 \end{aligned}$$

となるから、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AP^2 &= PH^2 + AH^2 \\ \Leftrightarrow 1^2 &= (\sqrt{k})^2 + \left(\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= k + \frac{4k^2 - 4k + 1}{k^2 + 1} \\ \Leftrightarrow k^2 + 1 &= k(k^2 + 1) + 4k^2 - 4k + 1 \quad (\because k^2 + 1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 - 3k &= 0 \\ \Leftrightarrow k(k^2 + 3k - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 0, \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

を得る。(2)より、 $0 < k < \frac{4}{3}$ であるから

$$k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$$

となる。

(答) $k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$

(4)

直線 ℓ と x 軸のなす角を α 、直線 AB と x 軸のなす角を β とおくと

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ \tan \beta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} > \frac{1}{2}$$

が成り立つから、 $\alpha > \beta$ であり、したがって $\theta = \alpha - \beta$ となる。よって

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}} \\ &= \frac{-8 + 2\sqrt{21}}{1 + \sqrt{21}} \\ &= \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}x^4-2xy+y^2&=0 \\ \Leftrightarrow x^4 &= -y^2+2xy \\ \Leftrightarrow x^4 &= -(x-y)^2+x^2 \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 &= x^2(1-x^2) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $(x-y)^2 \geq 0$ より

$$\begin{aligned}x^2(1-x^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1-x^2 &\geq 0 \text{ または } x=0 \\ \Leftrightarrow -1 \leq x &\leq 1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。この条件のもと、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}x-y &= \pm x\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow y &= x \pm x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

を得る。 $f(x)=x+x\sqrt{1-x^2}$ とおくと

$$f'(x)=1+\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} &= 2x^2-1\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{2}$ かつ $2x^2-1 \geq 0$ の条件のもと上式の両辺を2乗すると

$$\begin{aligned}1-x^2 &= (2x^2-1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2(4x^2-3) &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\because 2x^2-1 \geq 0 \right)$$

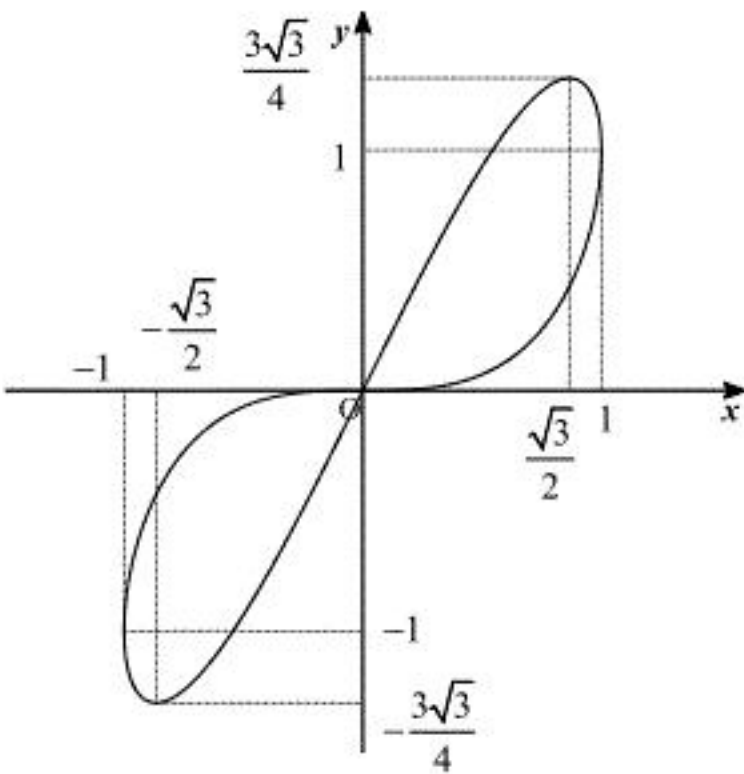
となるから、 $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	↗	$-$	0	$+$	0	$-$	↘
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

また、 $g(x)=x-x\sqrt{1-x^2}$ とおくと

$$g'(x)=\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\geq 0$$

となるため、 $g(x)$ は単調増加である。よって C の概形は下のようになる。



よって C 上の点で x 座標が最大となる点は $(1,1)$ であり、 y 座標が最大となる点は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ である。}$$

(答) x 座標が最大となる点は $(1,1)$

y 座標が最大となる点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(2)

$f(-x)=-f(x), g(-x)=-g(x)$ より、 C は原点对称であるから、 $x \geq 0$ について考えれば十分である。 C で囲まれた図形のうち $x \geq 0$ にある部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x)-g(x)\} dx &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\int_0^1 (1-x^2)' \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

であるから、求める面積は $\frac{4}{3}$ となる。

〔Ⅳ〕

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x^\beta} \quad (x > 0) \text{ より}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^\beta - \beta x^{\beta-1} \log x}{x^{2\beta}} = \frac{1 - \beta \log x}{x^{\beta+1}}$$

となる。よって $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	0	...	$e^{\frac{1}{\beta}}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{1}{\beta e}$	

よって $f(x)$ は $x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき極大値 $\frac{1}{\beta e}$ をとる。

(答) $\frac{1}{\beta e}$

(2)

$x \rightarrow \infty$ を考えるから、 $x > 1$ としてもよい。 $t = \log x (> 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{t^2}{2} < e^t \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{(\log x)^2}{2} < x \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{\log x}{x} < \frac{2}{\log x} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{\log x}{x^\beta} < \frac{2}{x^{\beta-1} \log x} \end{aligned}$$

となる。ここで $\beta > 1 \Leftrightarrow \beta - 1 > 0$ であるから、上式右辺は $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。よって はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

(3)

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_1^a \frac{\log x}{x^\beta} x \\ &= \int_1^a \left(\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \log x \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{1-\beta} x^{-\beta} dx \\ &= \left[\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \log x \right]_1^a - \left[\frac{1}{(1-\beta)^2} x^{1-\beta} \right]_1^a \\ &= \frac{\log a}{(1-\beta) a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $I(a) = \frac{\log a}{(1-\beta) a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2}$

(4)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log a}{(1-\beta) a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2} \right\}$$

$a^{\beta-1} = b^\beta$ とおくと $b > 1$ であり、 $a = b^{\frac{\beta}{\beta-1}}$ となる。よって

$$\frac{\log a}{(1-\beta) a^{\beta-1}} = -\frac{\beta}{(1-\beta)^2} \cdot \frac{\log b}{b^\beta}$$

となるから、(2)の結果を用いると

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{(1-\beta) a^{\beta-1}} = -\frac{\beta}{(1-\beta)^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\log b}{b^\beta} = 0$$

となる。よって

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log a}{(1-\beta) a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2} \right\} = \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

となる。

(答) $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{1}{(1-\beta)^2}$