

〔 I 〕

(1)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\
 &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\
 &= \frac{1}{3}n\{2(2n^2 + 3n + 1) - 6(n+1) + 3\} \\
 &= \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) \\
 &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

(2)

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{k=1}^n (2k)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n 4k^2 \\
 &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

であるから、 $\{a_n - b_n\}$ の第 n 項を n を用いて表すと

$$\begin{aligned}
 a_n - b_n &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{1}{3}n(2n+1)\{2n-1-2(n+1)\} \\
 &= -n(2n+1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -n(2n+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}
 c_n &= a_{n+1} - b_n \\
 &= a_n - b_n + (2n+1)^2 \\
 &= -n(2n+1) + (2n+1)^2 \\
 &= (-n+2n+1)(2n+1) \\
 &= (n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 c_n &> 100(n+1) \\
 &\Leftrightarrow (2n+1)(n+1) > 100(n+1) \\
 &\Leftrightarrow 2n+1 > 100 \\
 &\Leftrightarrow n > \frac{99}{2} = 49.5
 \end{aligned}$$

を得る。よって、 $c_n > 100(n+1)$ となる最小の n は 50 である。

〔Ⅱ〕

(1)

直線 ℓ の方程式は $kx - y + 2k = 0$ であるから、点 $A(0, 1)$ との距離 d は

$$d = \frac{|k \cdot 0 - 1 + 2k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

となる。

(答) $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$

(2)

円 C について

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

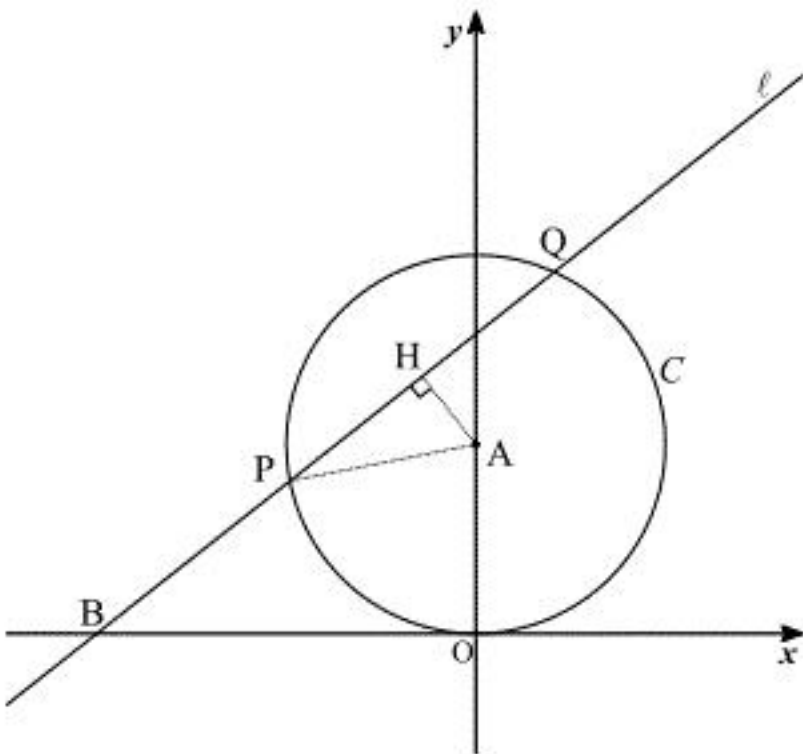
であるから、円 C は中心 A 、半径1の円となる。よって直線 ℓ と円 C が異なる2点で交わるのは、直線 ℓ と点 A の距離 d が1より小さいときである。したがって

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 1 \\ \Leftrightarrow |2k - 1| &< \sqrt{k^2 + 1} \\ \Leftrightarrow |2k - 1|^2 &< k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 4k &< 0 \\ \Leftrightarrow k(3k - 4) &< 0 \\ \therefore 0 < k &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $0 < k < \frac{4}{3}$

(3)



上図のように、点 A から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

$$\begin{aligned} PH &= \frac{1}{2}PQ = \sqrt{k} \\ AH &= d = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ AP &= 1 \end{aligned}$$

となるから、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AP^2 &= PH^2 + AH^2 \\ \Leftrightarrow 1^2 &= (\sqrt{k})^2 + \left(\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= k + \frac{4k^2 - 4k + 1}{k^2 + 1} \\ \Leftrightarrow k^2 + 1 &= k(k^2 + 1) + 4k^2 - 4k + 1 \quad (\because k^2 + 1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 - 3k &= 0 \\ \Leftrightarrow k(k^2 + 3k - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 0, \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

を得る。(2)より、 $0 < k < \frac{4}{3}$ であるから

$$k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$$

となる。

(答) $k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$

(4)

直線 ℓ と x 軸のなす角を α 、直線 AB と x 軸のなす角を β とおくと

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ \tan \beta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} > \frac{1}{2}$$

が成り立つから、 $\alpha > \beta$ であり、したがって $\theta = \alpha - \beta$ となる。よって

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}} \\ &= \frac{-8 + 2\sqrt{21}}{1 + \sqrt{21}} \\ &= \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x^\beta} \quad (x > 0) \text{ より}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^\beta - \beta x^{\beta-1} \log x}{x^{2\beta}} = \frac{1 - \beta \log x}{x^{\beta+1}}$$

となる。よって $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	0	...	$e^{\frac{1}{\beta}}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{1}{\beta e}$	

よって $f(x)$ は $x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき極大値 $\frac{1}{\beta e}$ をとる。

(答) $\frac{1}{\beta e}$

(2)

$$\begin{aligned}
 I(a) &= \int_1^a \frac{\log x}{x^\beta} x \\
 &= \int_1^a \left(\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \right)' \log x dx \quad (\because \beta > 1) \\
 &= \left[\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \log x \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{1-\beta} x^{-\beta} dx \\
 &= \left[\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \log x \right]_1^a - \left[\frac{1}{(1-\beta)^2} x^{1-\beta} \right]_1^a \\
 &= \frac{\log a}{(1-\beta)a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $I(a) = \frac{\log a}{(1-\beta)a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2}$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned} x^4 - 2xy + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^4 &= -y^2 + 2xy \\ \Leftrightarrow x^4 &= -(x-y)^2 + x^2 \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 &= x^2(1-x^2) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $(x-y)^2 \geq 0$ より

$$\begin{aligned} x^2(1-x^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1-x^2 &\geq 0 \text{ または } x=0 \\ \Leftrightarrow -1 \leq x &\leq 1 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。この条件のもと、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} x-y &= \pm x\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow y &= x \pm x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad y = x \pm x\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(2)

$$f(x) = x + x\sqrt{1-x^2} \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 1 + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{2}$ かつ $2x^2 - 1 \geq 0$ の条件のもと上式の両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= (2x^2-1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2(4x^2-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because 2x^2 - 1 \geq 0)$$

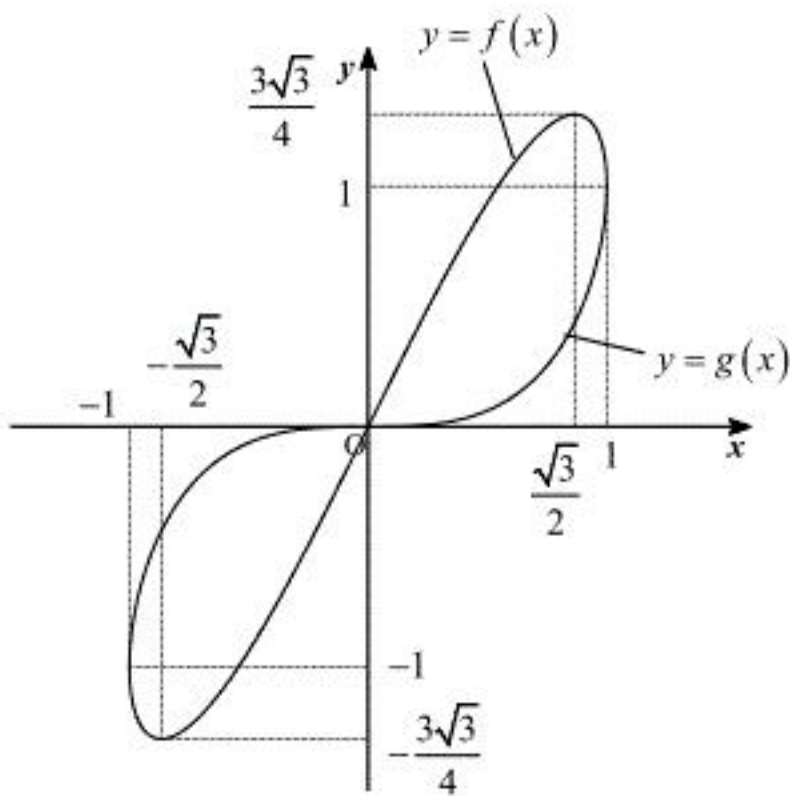
となるから、 $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(x)$	↗	-	0	+	0	-	↘
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

$$\text{また、} g(x) = x - x\sqrt{1-x^2} \text{ とおくと}$$

$$g'(x) = (1 - \sqrt{1-x^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$$

となるため、 $g(x)$ は単調増加である。よって C の概形は下のようになる。



よって C 上の点で x 座標が最大となる点は $(1, 1)$ であり、 y 座標が最大となる点は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad x \text{ 座標が最大となる点は } (1, 1)$$

$$y \text{ 座標が最大となる点は } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

(3)

$f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ より、 C は原点对称であるから、 $x \geq 0$ について考えれば十分である。 C で囲まれた図形のうち $x \geq 0$ にある部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\int_0^1 (1-x^2)' \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから、求める面積は $\frac{4}{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}$$