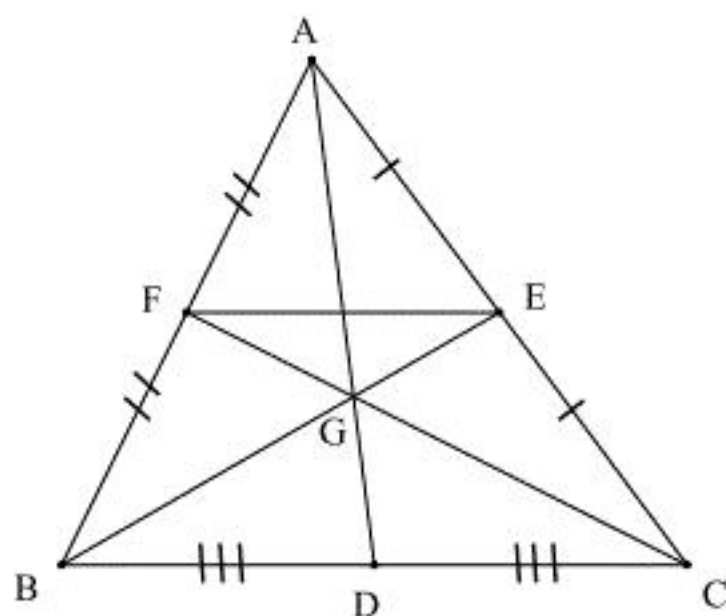


〔I〕



(1)

直線 AD , BE , CF が重心 G を通るから、点 D , E , F はそれぞれ辺 BC , CA , AB の中点である。中点連結定理より、 $FE \parallel BC$ かつ $FE:BC=1:2$ であるから、 $\triangle GEF \sim \triangle GBC$ であり、その相似比は $1:2$ となる。よって面積比は $1:4$ となるから、 $\triangle EFG = S$ とすると、 $\triangle BCG = 4S$ となる。また、 $EG:GB=1:2$ に注意すると、 $\triangle AFE = \triangle EFB = 3 \triangle EFG = 3S$ である。

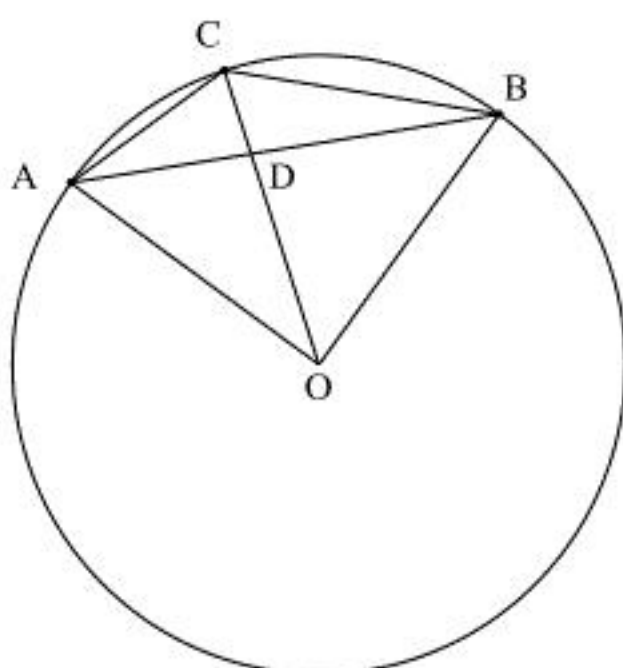
(答) $\triangle BCG = 4S$, $\triangle AFE = 3S$

(2)

$\triangle AFE \sim \triangle ABC$ であり、その相似比は $1:2$ であるから、 $\triangle ABC = 4 \triangle AFE = 12S$ である。また、四角形 $AFGE$ は $\triangle AFE$ と $\triangle EFG$ を合わせたものであるから、その面積は $3S + S = 4S$ である。したがって $\triangle ABC$ の面積は四角形 $AFGE$ の面積の $\frac{12S}{4S} = 3$ 倍となる。

(答) 3倍

〔Ⅱ〕



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ と表記する。

(1)

$2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = \vec{0}$ より, $2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\vec{c}$ であるから, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + 3\vec{b})^2 &= (4\vec{c})^2 \\ \Leftrightarrow 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} &= 16|\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1$

(2)

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{b} - \vec{a}|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{4 + 4 - 2} = \sqrt{6}$$

となる。

(答) $AB = \sqrt{6}$

(3)

点 D は線分 OC 上にあることから, t を実数として,

$$\overrightarrow{OD} = t\vec{c} = \frac{t}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b})$$

と表される。また点 D は線分 AB 上にあるから,

$$\frac{t}{4}(2+3) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5}$$

である。よって,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

(4)

$\overrightarrow{OD} = \frac{4}{5}\vec{c}$ であるから, $OD:DC = 4:1$ である。よって $\triangle OAB$ の面積を S とおくと, 四角形

OBCA の面積は $\frac{5}{4}S$ と表される。ここで,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

であるから, 四角形 OBCA の面積は $\frac{5\sqrt{15}}{8}$ である。

(答) $\frac{5\sqrt{15}}{8}$

〔Ⅲ〕

(1)

円 C の方程式を変形すると,

$$\begin{aligned} kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k(x^2 + y^2 - 4) + (x - y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となるから, 円 C は k の値によらず,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x - y + 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

をみたす点 (x, y) を通ることがわかる。②より $x = y - 1$ であり, これを①に代入して,

$$\begin{aligned} (y-1)^2 + y^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって②より定点の座標は, $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right)$ (複号同順) である。

$$\text{(答)} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right) \text{(複号同順)}$$

(2)

円 C の方程式を変形すると, $k > 0$ より,

$$\begin{aligned} kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 &= \frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

となる。よって円 C の中心 D の座標は $\left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$ である。線分 DE の長さは,

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2k} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2k} - 5\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2k^2} - \frac{4}{k} + 26} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 4\right)^2 + 18} \end{aligned}$$

となるから, $\frac{1}{k} = 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$ のとき最小になり, このとき

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k} = 8 \\ \therefore r &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad k = \frac{1}{4}, r = 2\sqrt{2}$$

[IV]

(1)

曲線 $C_n: y = \frac{1}{a_n}x^2$ より, $y' = \frac{2}{a_n}x$ であるから, 点 $P_n(a_n, a_n)$ における接線の傾きは2である。

よって直線 ℓ_n の方程式は,

$$y - a_n = -\frac{1}{2}(x - a_n)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

となる。曲線 C_n と直線 ℓ_n との交点の x 座標は,

$$\frac{1}{a_n}x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore 2x^2 + a_n x - 3a_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a_n)(2x + 3a_n) = 0$$

$$\therefore x = a_n, -\frac{3}{2}a_n$$

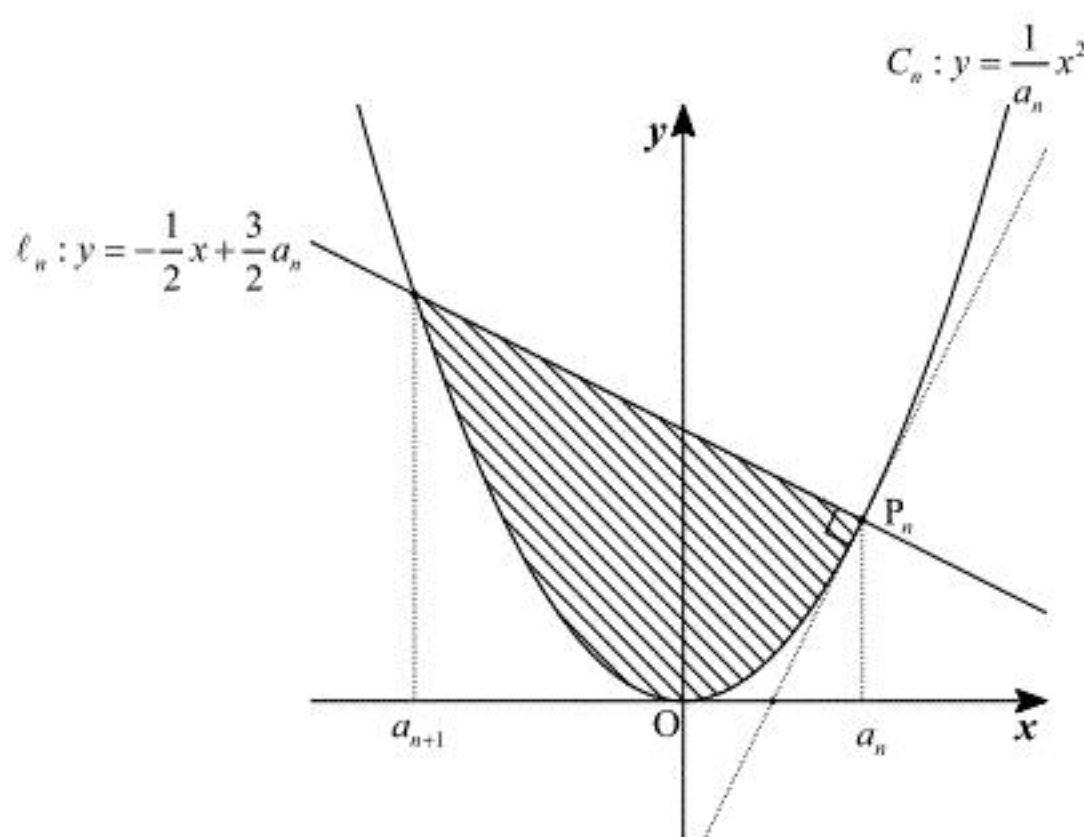
となるから, $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n$ である。したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は, $a_1 = 1$ より,

$$a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(2)



曲線 C_n と直線 ℓ_n によって囲まれた部分は, $a_n > a_{n+1}$ のときは図の斜線部のようになり, a_n と a_{n+1} の大小が n の偶奇によって変わることには注意すると, その面積 A_n は,

$$\begin{aligned} A_n &= \left| \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{a_n}x^2 \right) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left(x^2 + \frac{a_n}{2}x - \frac{3}{2}a_n^2 \right) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} (x - a_n) \left(x + \frac{3}{2}a_n \right) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{6a_n} \times \left(\frac{5}{2}a_n \right)^3 \right| \\ &= \frac{125}{48}a_n^2 \\ &= \frac{125}{48} \left(\frac{9}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k &= \sum_{k=1}^n \frac{125}{48} \left(\frac{9}{4} \right)^{k-1} \\ &= \frac{125}{48} \times \frac{\left(\frac{9}{4} \right)^n - 1}{\frac{9}{4} - 1} \\ &= \frac{25}{12} \left\{ \left(\frac{9}{4} \right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n A_k = \frac{25}{12} \left\{ \left(\frac{9}{4} \right)^n - 1 \right\}$$