

【I】

(1)

曲線 $C_n: y = \frac{1}{a_n}x^2$ より, $y' = \frac{2}{a_n}x$ であるから, 点 $P_n(a_n, a_n)$ における接線の傾きは2である。

よって直線 ℓ_n の方程式は,

$$y - a_n = -\frac{1}{2}(x - a_n)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

となる。曲線 C_n と直線 ℓ_n との交点の x 座標は,

$$\frac{1}{a_n}x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore 2x^2 + a_n x - 3a_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a_n)(2x + 3a_n) = 0$$

$$\therefore x = a_n, -\frac{3}{2}a_n$$

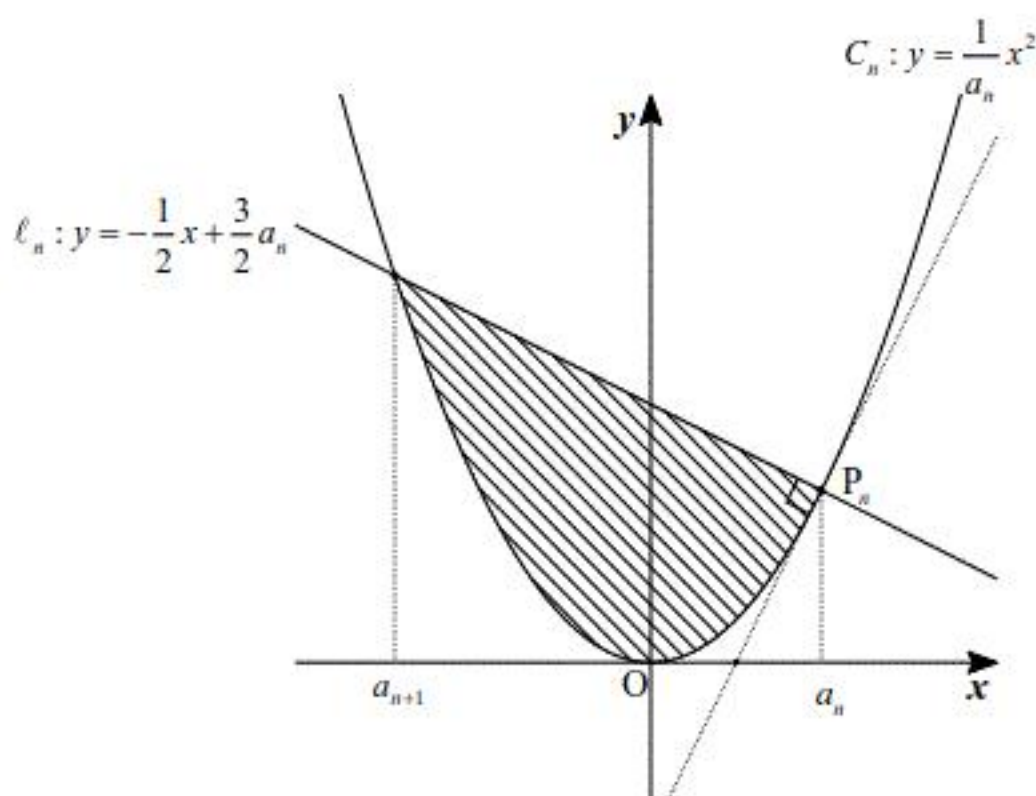
となるから, $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n$ である。したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は, $a_1 = 1$ より,

$$a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(2)



曲線 C_n と直線 ℓ_n によって囲まれた部分は $a_n > a_{n+1}$ のときは図の斜線部のようになり, a_n と a_{n+1} の大小が n の偶奇によって変わることに注意すると, その面積 A_n は,

$$\begin{aligned} A_n &= \left| \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{a_n}x^2 \right) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left(x^2 + \frac{a_n}{2}x - \frac{3}{2}a_n^2 \right) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} (x - a_n) \left(x + \frac{3}{2}a_n \right) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{6a_n} \times \left(\frac{5}{2}a_n \right)^3 \right| \\ &= \frac{125}{48}a_n^2 \\ &= \frac{125}{48} \left(\frac{9}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k &= \sum_{k=1}^n \frac{125}{48} \left(\frac{9}{4} \right)^{k-1} \\ &= \frac{125}{48} \times \frac{\left(\frac{9}{4} \right)^n - 1}{\frac{9}{4} - 1} \\ &= \frac{25}{12} \left\{ \left(\frac{9}{4} \right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n A_k = \frac{25}{12} \left\{ \left(\frac{9}{4} \right)^n - 1 \right\}$$

〔Ⅱ〕

(1)

円 C の方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k(x^2 + y^2 - 4) + (x - y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、円 C は k の値によらず、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x - y + 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

をみたす点 (x, y) を通ることがわかる。②より $x = y - 1$ であり、これを①に代入して、

$$\begin{aligned} (y - 1)^2 + y^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって②より、定点の座標は、 $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right)$ (複号同順) である。

$$\text{(答)} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right) \text{(複号同順)}$$

(2)

円 C の方程式を変形すると、 $k > 0$ より、

$$\begin{aligned} kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 &= \frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

となる。よって円 C の中心 D の座標は $\left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$ である。線分 DE の長さは、

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2k} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2k} - 5\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2k^2} - \frac{4}{k} + 26} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 4\right)^2 + 18} \end{aligned}$$

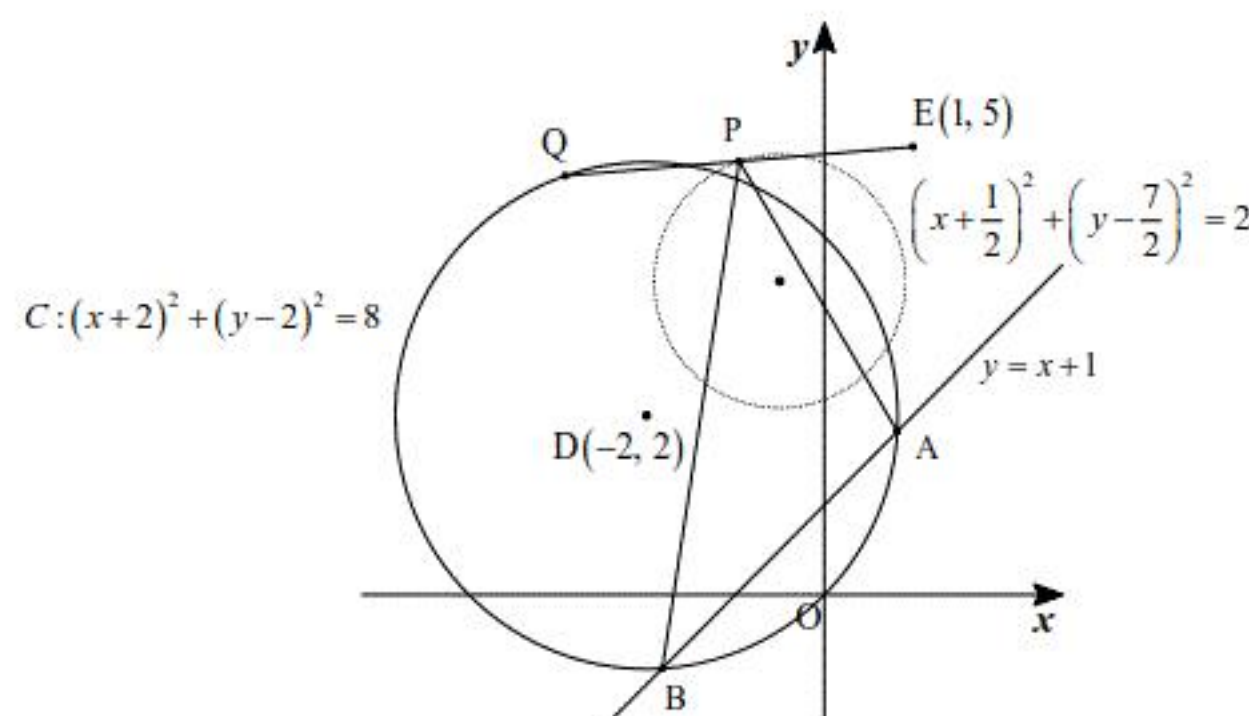
となるから、 $\frac{1}{k} = 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$ のとき最小になり、このとき

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k} = 8 \\ \therefore r &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad k = \frac{1}{4}, r = 2\sqrt{2}$$

(3)



$k = \frac{1}{4}$ のとき、円 C の方程式は、

$$C: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

となる。ここで、 $P(X, Y)$, $Q(a, b)$ とすると、点 Q は円 C 上にあるから、

$$(a+2)^2 + (b-2)^2 = 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、点 P は QE の中点であるから、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1+a}{2}, Y = \frac{5+b}{2} \\ \Leftrightarrow a &= 2X - 1, b = 2Y - 5 \end{aligned}$$

となる。これを①式に代入して、

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{7}{2}\right)^2 = 2$$

を得る。このことから、点 Q が円 C 上を動くときに点 P が描く軌跡は中心 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 、半径 $\sqrt{2}$

の円になることがわかる。この円の中心と直線 AB 、すなわち $x - y + 1 = 0$ との距離は、

$$\frac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

である。△ ABP の面積が最大になるのは直線 AB と点 P との距離が最大となるときであり、

点 P が動く円の半径が $\sqrt{2}$ であることに注意すると、その距離の最大値は $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ で

ある。 $AB = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2} - \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2} - \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{14}$ であるから、△ ABP の面積の最

大値は、

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

〔Ⅲ〕

(1)

曲線 C の方程式

$$|y - 3x - 2x^2| = -(x-1)(2x-1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

において、左辺が非負だから右辺も非負でなければならない。よって x 座標が取り得る値の範囲は、

$$-(x-1)(2x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

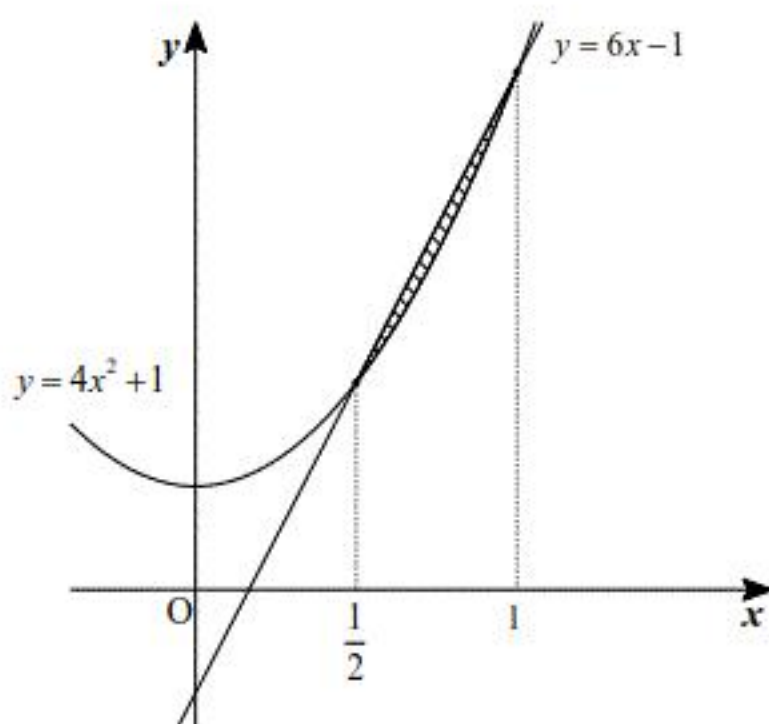
(2)

①式より、 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において、

$$y - 3x - 2x^2 = \pm(x-1)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow y = 4x^2 + 1, 6x - 1$$

である。したがって曲線 C で囲まれる図形は下図の斜線部のようになる。



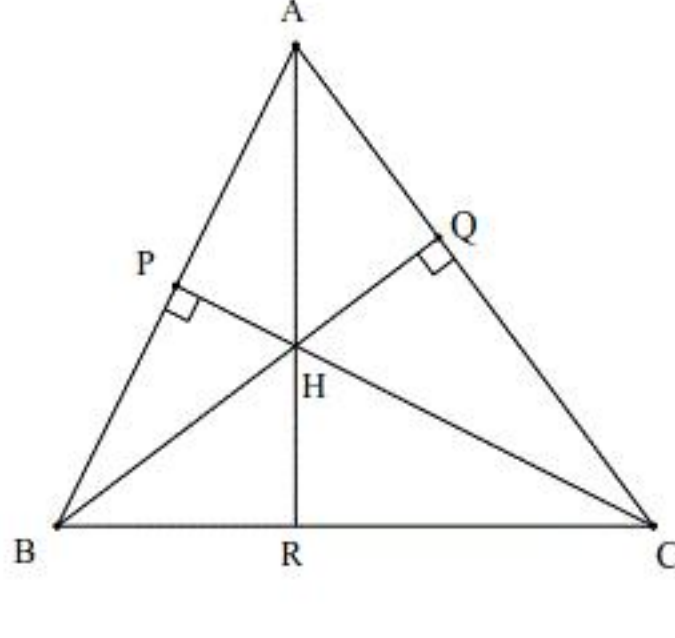
よってこの部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \{(6x-1) - (4x^2+1)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^2 + 6x - 2) dx \\ &= -4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) dx \\ &= \frac{4}{6} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12}$$

〔Ⅳ〕



(1)

上図より

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \quad (k \text{ は実数})$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow k \overrightarrow{AB} \cdot (k \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow k \vec{a} \cdot (k \vec{a} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow k \left\{ |\vec{a}|^2 k - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \quad (\because k = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \end{aligned}$$

である。よって $\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$ である。同様にして

$$\overrightarrow{AQ} = l \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 \quad (l \text{ は実数})$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow l \overrightarrow{AC} \cdot (l \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow l \vec{b} \cdot (l \vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow l \left\{ |\vec{b}|^2 l - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow l = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (\because l = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \end{aligned}$$

である。よって $\overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}, \overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

(2)

$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = u, \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = v$ とおく。点 H が直線 BQ 上にあるから、 $\overrightarrow{AH}$ は実数 s を用いて

$$\overrightarrow{AH} = (1-s) \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AQ} = (1-s) \vec{a} + sv \vec{b}$$

と表せる。点 H は直線 PC 上にもあるから、同様に実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = (1-t) \overrightarrow{AP} + t \overrightarrow{AC} = (1-t) u \vec{a} + t \vec{b}$$

とも表せる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が一次独立であるから、これらの係数を比較して、

$$\begin{cases} 1-s = (1-t)u \\ vs = t \end{cases}$$

となる。これを s, t について解くと、

$$s = \frac{u-1}{uv-1}, t = \frac{u-1}{uv-1} v$$

となるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (1-s) \vec{a} + sv \vec{b} \\ &= \frac{u(v-1)}{uv-1} \vec{a} + \frac{v(u-1)}{uv-1} \vec{b} \\ &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})(|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \vec{b} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \left\{ (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} + (|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AH} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \left\{ (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} + (|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right\}$$

ここで、 $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$ であり、

$$\begin{aligned} &\left\{ (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} + (|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + (|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) |\vec{b}|^2 - (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) |\vec{a}|^2 \\ &= (|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) (|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ である。よって $\overrightarrow{AH}$ は $\overrightarrow{BC}$ に直交する。

(証明終)

(3)

(2)より、 $AR \perp BC$ である。 $\triangle ABC$ の面積に着目し、これを S とおくと、

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \angle A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AR}|$$

である。両辺を 2 乗して、 $\sin^2 \angle A = 1 - \cos^2 \angle A = 1 - x^2$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle A = abx$ の関係を用いて

整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 \angle A &= \frac{1}{4} |\vec{b} - \vec{a}|^2 |\overrightarrow{AR}|^2 \\ \Leftrightarrow a^2 b^2 (1 - x^2) &= (a^2 + b^2 - 2abx) |\overrightarrow{AR}|^2 \end{aligned}$$

である。ここで $a^2 + b^2 - 2abx = 0$ のとき $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ であるから

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= \frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2} \\ &= \frac{-(a^2 - b^2)^2}{4a^2 b^2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

である。よって $a^2 + b^2 - 2abx \neq 0$ であり、

$$|\overrightarrow{AR}|^2 = \frac{a^2 b^2 (1 - x^2)}{a^2 + b^2 - 2abx}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AR}|^2 = \frac{a^2 b^2 (1 - x^2)}{a^2 + b^2 - 2abx}$$

(4)

$$|\overrightarrow{AR}|^2 = f(x) = \frac{a^2 b^2 (1 - x^2)}{a^2 + b^2 - 2abx}$$

とおく。 $0 < \angle A < \pi$ より、 $-1 < x < 1$ である。この範囲における $f(x)$ の最大値を求める。 $f(x)$ の導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(a^2 + b^2 - 2abx) + 2ab(1 - x^2)}{(a^2 + b^2 - 2abx)^2} a^2 b^2 \\ &= \frac{2a^2 b^2 \{ abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab \}}{(a^2 + b^2 - 2abx)^2} \\ &= \frac{2a^2 b^2 (ax - b)(bx - a)}{(a^2 + b^2 - 2abx)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 a, b の大小で場合分けを行う。

[1] $a > b$ のとき

$\frac{b}{a} < 1 < \frac{a}{b}$ に注意すると、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{b}{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$\diagdown$	$+$	0	$-$	$\diagdown$
$f(x)$	$\diagdown$	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$\diagdown$

したがって $f(x)$ は $x = \frac{b}{a}$ で最大となり、このとき

$$|\overrightarrow{AR}|^2 = f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2 b^2 \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}{a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{b}{a}} = b^2$$

である。また、 $x = \frac{b}{a}$ より、 $a \cos \angle A = b$ であるから、点 Q が C に一致する。よってこのと

き $\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形となることがわかる。

[2] $b > a$ のとき

[1]の場合と同様に議論すると、 $f(x)$ は $x = \frac{a}{b}$ で最大となることがわかる。したがってこ

のとき、

$$|\overrightarrow{AR}|^2 = f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2 b^2 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}{a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{a}{b}} = a^2$$

である。また、 $x = \frac{a}{b}$ より、 $b \cos \angle A = a$ であるから、点 P が B に一致する。よってこのと

き $\triangle ABC$ は $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形となることがわかる。

$$a > b \text{ のとき} \quad |\overrightarrow{AR}|^2 \text{ の最大値} : b^2 \quad \triangle ABC \text{ は } \angle C = 90^\circ \text{ の直角三角形}$$

(答)

$$b > a \text{ のとき} \quad |\overrightarrow{AR}|^2 \text{ の最大値} : a^2 \quad \triangle ABC \text{ は } \angle B = 90^\circ \text{ の直角三角形}$$