

〔I〕

(1)

曲線  $C_n: y = \frac{1}{a_n}x^2$  より,  $y' = \frac{2}{a_n}x$  であるから, 点  $P_n(a_n, a_n)$  における接線の傾きは 2 である。

よって直線  $\ell_n$  の方程式は,

$$y - a_n = -\frac{1}{2}(x - a_n)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

となる。曲線  $C_n$  と直線  $\ell_n$  との交点の  $x$  座標は,

$$\frac{1}{a_n}x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + a_n x - 3a_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a_n)(2x + 3a_n) = 0$$

$$\therefore x = a_n, -\frac{3}{2}a_n$$

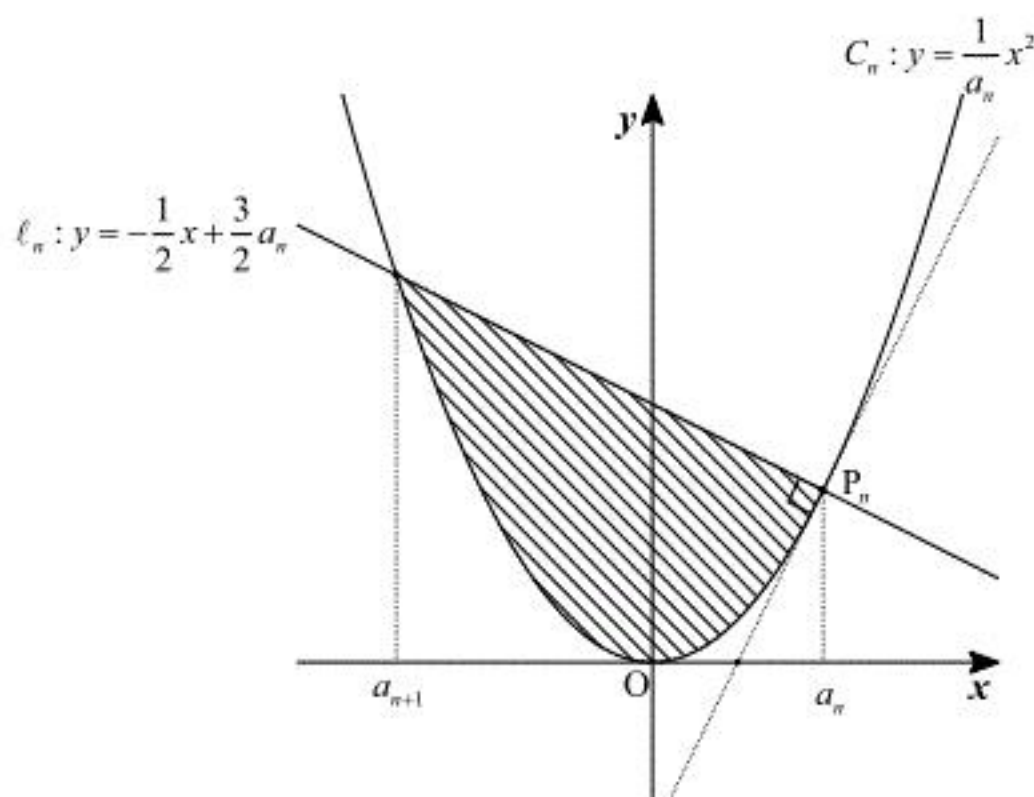
となるから,  $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n$  である。したがって数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_1 = 1$  より,

$$a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(2)



曲線  $C_n$  と直線  $\ell_n$  によって囲まれた部分は,  $a_n > a_{n+1}$  のときは図の斜線部のようになり,  $a_n$  と  $a_{n+1}$  の大小が  $n$  の偶奇によって変わることに注意すると, その面積  $A_n$  は,

$$\begin{aligned} A_n &= \left| \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{a_n}x^2 \right) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left( x^2 + \frac{a_n}{2}x - \frac{3}{2}a_n^2 \right) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} (x - a_n) \left( x + \frac{3}{2}a_n \right) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{6a_n} \times \left( \frac{5}{2}a_n \right)^3 \right| \\ &= \frac{125}{48}a_n^2 \\ &= \frac{125}{48} \left( \frac{9}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k &= \sum_{k=1}^n \frac{125}{48} \left( \frac{9}{4} \right)^{k-1} \\ &= \frac{125}{48} \times \frac{\left( \frac{9}{4} \right)^n - 1}{\frac{9}{4} - 1} \\ &= \frac{25}{12} \left\{ \left( \frac{9}{4} \right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n A_k = \frac{25}{12} \left\{ \left( \frac{9}{4} \right)^n - 1 \right\}$$

〔Ⅱ〕

(1)

円  $C$  の方程式を変形すると,

$$\begin{aligned} kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k(x^2 + y^2 - 4) + (x - y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となるから, 円  $C$  は  $k$  の値によらず,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x - y + 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

をみたす点  $(x, y)$  を通ることがわかる。②より  $x = y - 1$  であり, これを①に代入して,

$$\begin{aligned} (y-1)^2 + y^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって②より定点の座標は,  $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right)$  (複号同順) である。

$$(\text{答}) \left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right) (\text{複号同順})$$

(2)

円  $C$  の方程式を変形すると,  $k > 0$  より,

$$\begin{aligned} kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 &= \frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

となる。よって円  $C$  の中心  $D$  の座標は  $\left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$  である。線分  $DE$  の長さは,

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2k} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2k} - 5\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2k^2} - \frac{4}{k} + 26} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 4\right)^2 + 18} \end{aligned}$$

となるから,  $k = \frac{1}{4}$  のとき最小になり, このとき

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k} = 8 \\ \therefore r &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{1}{4}, r = 2\sqrt{2}$$

### 〔Ⅲ〕

(1)

曲線  $C$  の方程式

$$|y - 3x - 2x^2| = -(x-1)(2x-1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

において、左辺が非負だから右辺も非負でなければならない。よって  $x$  座標が取り得る値の範囲は、

$$-(x-1)(2x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

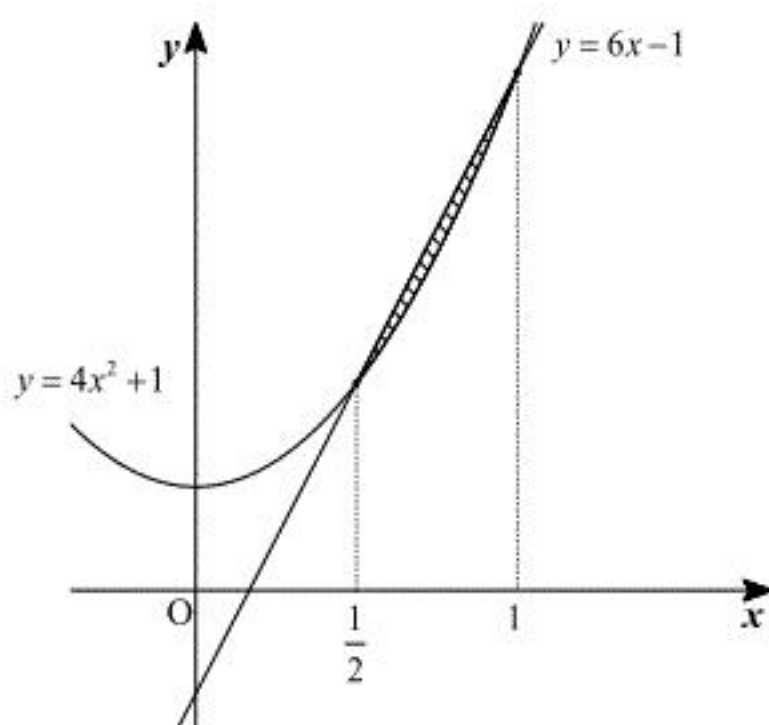
(2)

①式より、 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  において、

$$y - 3x - 2x^2 = \pm(x-1)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow y = 4x^2 + 1, 6x - 1$$

である。したがって曲線  $C$  で囲まれる図形は下図の斜線部のようになる。



よってこの部分の面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \{(6x-1) - (4x^2+1)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^2 + 6x - 2) dx \\ &= -4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) dx \\ &= \frac{4}{6} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12}$$

〔Ⅳ〕

(1)

関数  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$  の導関数は、

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

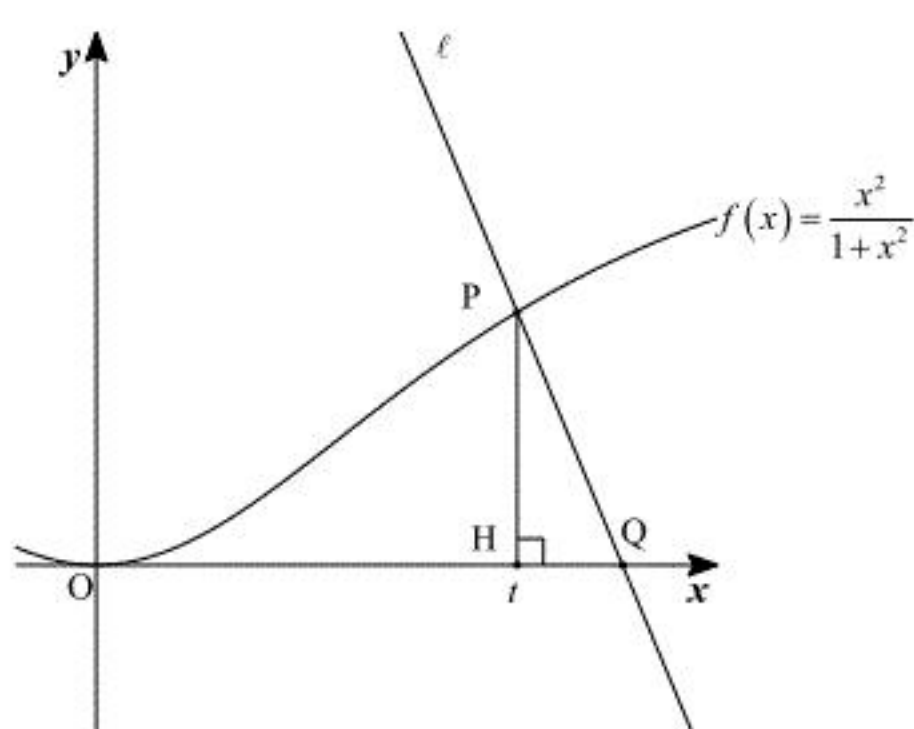
となるから、 $f(x)$  の増減表は次の図のようになる。

|         |            |     |            |
|---------|------------|-----|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $0$ | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

したがって、関数  $f(x)$  は区間  $x \leq 0$  で単調に減少し、区間  $x \geq 0$  で単調に増加する。

(答)  $x \leq 0$  で単調減少、 $x \geq 0$  で単調増加

(2)



曲線  $y = f(x)$  上の点  $P(t, f(t))$  ( $t > 0$ ) における法線を  $\ell$  とする。 $t > 0$  で  $f'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} > 0$  で

あるから、 $\ell$  の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f(t) &= -\frac{1}{f'(t)}(x - t) \\ \Leftrightarrow y - \frac{t^2}{1+t^2} &= -\frac{(1+t^2)^2}{2t}(x - t) \end{aligned}$$

である。点  $Q$  の  $x$  座標は、この式で  $y = 0$  として、

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{1+t^2} &= -\frac{(1+t^2)^2}{2t}(x - t) \\ \therefore x &= t + \frac{2t^3}{(1+t^2)^3} \end{aligned}$$

となる。したがって三角形  $PQH$  の面積  $S(t)$  は、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \text{HQ} \cdot \text{PH} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2t^3}{(1+t^2)^3} \cdot \frac{t^2}{1+t^2} \\ &= \frac{t^5}{(1+t^2)^4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答)  $S(t) = \frac{t^5}{(1+t^2)^4}$

(3)

$S(t)$  の導関数は、

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{5t^4(1+t^2)^4 - t^5 \cdot 4 \cdot 2t(1+t^2)^3}{(1+t^2)^8} \\ &= \frac{5t^4(1+t^2) - 8t^6}{(1+t^2)^5} \\ &= \frac{(5-3t^2)t^4}{(1+t^2)^5} \end{aligned}$$

となるから、 $t > 0$  における  $S(t)$  の増減表は次の図のようになる。

|         |            |            |                       |            |
|---------|------------|------------|-----------------------|------------|
| $t$     | $0$        | $\cdots$   | $\frac{\sqrt{15}}{3}$ | $\cdots$   |
| $S'(t)$ | $\searrow$ | $+$        | $0$                   | $-$        |
| $S(t)$  | $\searrow$ | $\nearrow$ | 最大                    | $\searrow$ |

したがって  $S(t)$  は  $t = \frac{\sqrt{15}}{3}$  のとき最大になり、このとき  $S(t)$  は

$$S\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^5}{\left\{1 + \left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2\right\}^4} = \frac{75\sqrt{15}}{4096}$$

である。