

〔I〕

(1)

背理法を用いて $\sqrt{3}$ が無理数であることを示す。すなわち、 $\sqrt{3}$ が互いに素である自然数 m, n を用いて、 $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ と表せる有理数であると仮定して矛盾を導く。仮定より、

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{m}{n} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}m &= n\end{aligned}$$

が成り立つ。両辺正であるから両辺2乗して、

$$3m^2 = n^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。①の左辺が3の倍数であるから、 n^2 および n は3の倍数である。これより、 k を自然数として $n = 3k$ とおくと、

$$3m^2 = (3k)^2 \Leftrightarrow m^2 = 3k^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②の右辺が3の倍数であるから m^2 および m は3の倍数である。ここで、 m と n はともに3の倍数であるから、 m と n が互いに素であるという仮定に矛盾する。以上より、 $\sqrt{3}$ は無理数である。

(証明終)

(2)

背理法を用いて命題「 $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば、 $b = d$ である」を示す。すなわち、 $b \neq d$ であると仮定して矛盾を導く。仮定より、

$$\begin{aligned}a + b\sqrt{3} &= c + d\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (b - d)\sqrt{3} &= c - a \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} &= \frac{c - a}{b - d} \quad (\because b \neq d) \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。(1)より、③の左辺 $\sqrt{3}$ は無理数であるが、 a, b, c, d が有理数であるから、③の右辺は有理数であり、矛盾が生じる。よって、

$$b = d$$

である。これより、

$$a = c$$

である。以上より、有理数 a, b, c, d に対して $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば、 $a = c$ かつ $b = d$ である。

(証明終)

(3)

与式を整理すると、

$$\begin{aligned}(a + \sqrt{3})(b + 2\sqrt{3}) &= 9 + 5\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow ab + 6 + (2a + b)\sqrt{3} &= 9 + 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。ここで、 a, b が有理数であり、 $ab, 2a + b$ も有理数であるから(2)より、

$$\begin{cases} ab + 6 = 9 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \cdot b = 6 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

となる。解と係数の関係より、 $2a, b$ は2次方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ の解である。これを解くと、

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2, 3\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}(2a, b) &= (2, 3), (3, 2) \\ \therefore (a, b) &= (1, 3), \left(\frac{3}{2}, 2\right)\end{aligned}$$

である。

(答) $(a, b) = (1, 3), \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

〔Ⅱ〕

(1)

3点B, H, Cは同一直線上にあるから、 k を実数として、

$$\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}$$

と表される。これより、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH} \\ &=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC} \\ &=(6, 0, -6)+k(-4, 4, 8) \\ &=(6-4k, 4k, -6+8k)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=0 \\ \Leftrightarrow(6-4k, 4k, -6+8k)\cdot(-4, 4, 8)&=0 \\ \Leftrightarrow(3-2k, 2k, -3+4k)\cdot(-1, 1, 2)&=0 \\ \Leftrightarrow(-3+2k)+2k+(-6+8k)&=0 \\ \Leftrightarrow k&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH} \\ &=\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \\ &=(3, -3, -5)+\frac{3}{4}(-4, 4, 8) \\ &=(0, 0, 1)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OH}=(0, 0, 1)$

(2)

$\vec{v}$ が平面ABCに垂直であるから、 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$ かつ $\overrightarrow{AC}\perp\vec{v}$ である。 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}&=0 \\ \Leftrightarrow(6, 0, -6)\cdot(v_1, v_2, v_3)&=0 \\ \Leftrightarrow 6v_1-6v_3&=0 \\ \Leftrightarrow v_1-v_3&=0\end{aligned}\quad \cdot\cdot\cdot\textcircled{1}$$

となる。 $\overrightarrow{AC}\perp\vec{v}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{v}&=0 \\ \Leftrightarrow(2, 4, 2)\cdot(v_1, v_2, v_3)&=0 \\ \Leftrightarrow 2v_1+4v_2+2v_3&=0 \\ \Leftrightarrow v_1+2v_2+v_3&=0\end{aligned}\quad \cdot\cdot\cdot\textcircled{2}$$

となる。①, ②より、

$$\begin{cases} v_2=-v_1 \\ v_3=v_1 \end{cases}\quad \cdot\cdot\cdot\textcircled{3}$$
$$\cdot\cdot\cdot\textcircled{4}$$

が得られる。また、 $|\vec{v}|=1$ に③, ④を代入して、

$$\begin{aligned}|\vec{v}|&=1 \\ \Leftrightarrow\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}&=1 \\ \Leftrightarrow\sqrt{v_1^2+(-v_1)^2+v_1^2}&=1 \\ \Leftrightarrow\sqrt{3v_1^2}&=1 \\ \therefore v_1&=\frac{\sqrt{3}}{3}(\because v_1>0)\end{aligned}$$

となる。③, ④より、

$$v_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}, v_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

となるから、

$$\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

である。

(答) $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(3)

$\vec{v}$ は平面ABCに垂直であるから $\vec{v}\perp\overrightarrow{BC}$ である。これより、三角形PBCは底辺BC、高さHP

の三角形である。ここで、 $\overrightarrow{BC}=(-4, 4, 8)$ より $|\overrightarrow{BC}|=4\sqrt{6}$ である。また、HP=2より三角形

PBCの面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot\text{BC}\cdot\text{PH}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}\cdot 2=4\sqrt{6}$$

となる。

(答) $4\sqrt{6}$

(4)

PH= d より△PBCの面積 S は、(2)と同様にして、

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\text{BC}\cdot\text{PH} \\ &=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}\cdot d \\ &=2\sqrt{6}d\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP} \\ &=(3, 3, 0)+d\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d+3, -\frac{\sqrt{3}}{3}d+3, \frac{\sqrt{3}}{3}d\right)\end{aligned}$$

であり、 $\overrightarrow{AB}=(6, 0, -6)$ より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2&=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d+3\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}d+3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2=d^2+18 \\ |\overrightarrow{AB}|^2&=6^2+0^2+(-6)^2=72 \\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}&=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d+3\right)\cdot 6+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}d+3\right)\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{3}d\cdot(-6)=18\end{aligned}$$

である。よって、△PABの面積 T は、

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AB}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})^2} \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{(d^2+18)\cdot 72-18^2} \\ &=3\sqrt{2d^2+27}\end{aligned}$$

となる。また、 $\overrightarrow{AC}=(2, 4, 2)$ より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=2^2+4^2+2^2=24 \\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d+3\right)\cdot 2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}d+3\right)\cdot 4+\frac{\sqrt{3}}{3}d\cdot 2=18\end{aligned}$$

であるから、△PACの面積 U は、

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC})^2} \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{(d^2+18)\cdot 24-18^2} \\ &=\sqrt{6d^2+27}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}S^2&=T^2-U^2 \\ \Leftrightarrow(2\sqrt{6}d)^2&=(3\sqrt{2d^2+27})^2-(\sqrt{6d^2+27})^2 \\ \Leftrightarrow 24d^2&=(18d^2+9\cdot 27)-(6d^2+27) \\ \Leftrightarrow 12d^2&=8\cdot 27 \\ \Leftrightarrow d^2&=18 \\ \therefore d&=3\sqrt{2}(\because d>0)\end{aligned}$$

である。

(答) $d=3\sqrt{2}$

【Ⅲ】

(1)

x, y, z は自然数であるから, $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$ を満たす整数 X, Y, Z を用いて,

$$x = X + 1, y = Y + 1, z = Z + 1$$

と表せる。これより, (*) は,

$$X + Y + Z = 5$$

と表せる。ここで, 5個の玉と2本の棒を1列に並べることを考えたとき, 棒で仕切られた玉の数を左から X, Y, Z に対応させると, これは $X + Y + Z = 5$ を満たす整数の組 (X, Y, Z) をすべて表現できる。よって, 求める個数は5個の玉と2本の棒の並べ方の総数に等しく

$$\frac{7!}{5!2!} = 21 \text{ (個)}$$

である。

(答) 21個

(2)

$n \leq 2$ のとき, $x + y + z \geq 3$ であるから求める個数は0個である。 $n \geq 3$ のとき, (1)と同様に考えると,

$$X + Y + Z = n - 3$$

を満たす整数の組 (X, Y, Z) の個数は, $n - 3$ 個の玉と2本の棒の並べ方の総数に等しく

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ (個)}$$

である。以上より, 求める個数は,

$$\begin{cases} n \leq 2 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ n \geq 3 \text{ のとき, } \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(3)

$n \leq 2$ のとき, $x + y + z \geq 3$ であるから求める個数は0個である。 $n \geq 3$ のとき,

$$x + y + z \leq n$$

を満たす整数の組 (x, y, z) の個数は, $x + y + z = k$ (k は整数) を満たす整数の組 (x, y, z) の個数を $k \leq n$ を満たすすべてについて足し合わせたものに等しい。(2)より, $k \leq 2$ のときは0個であり考える必要はないから, $n \geq 3$ のとき求める個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{(k-1)(k-2)}{2} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)(k-2)}{2} - 0 - 0 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} \cdot 2n \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

である。以上より, 求める個数は,

$$\begin{cases} n \leq 2 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ n \geq 3 \text{ のとき, } \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

【IV】

(1)

$$y = -x^2 + b \text{ のとき,}$$

$$y' = -2x$$

であるから、 C 上の点 $(p, -p^2 + b)$ における接線 ℓ の方程式は、

$$y = -2p(x - p) - p^2 + b$$

$$\Leftrightarrow y = -2px + p^2 + b$$

である。同様に、点 $(q, -q^2 + b)$ における接線 m の方程式は、

$$y = -2q(x - q) - q^2 + b$$

$$\Leftrightarrow y = -2qx + q^2 + b$$

である。ここで、 ℓ と m が直交するから、傾きについて、

$$(-2p) \cdot (-2q) = -1 \Leftrightarrow pq = -\frac{1}{4}$$

が成り立つ。また、 ℓ と m の交点の x 座標は

$$-2px - p^2 + b = -2qx - q^2 + b$$

$$\Leftrightarrow 2(p - q)x = (p - q)(p + q)$$

$$\therefore x = \frac{p + q}{2} \quad (p \neq q)$$

であり、 y 座標は

$$y = -2p \cdot \frac{p + q}{2} - p^2 + b = -pq + b$$

である。条件よりこれが負であるから、求める条件は、

$$-pq + b < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + b < 0$$

$$\therefore b < -\frac{1}{4}$$

である。

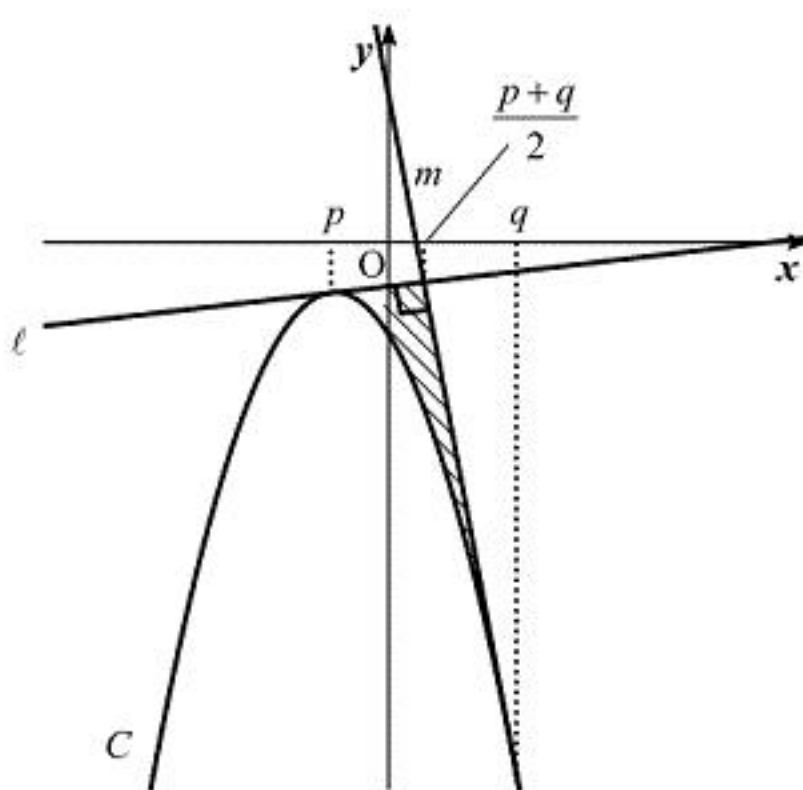
$$(\text{答}) \quad b < -\frac{1}{4}$$

(2)

問題文より、

$$q - p > 0 \Leftrightarrow q > p$$

である。以下に、曲線 C と 2 本の接線 ℓ, m で囲まれた部分を斜線部で示す。



上図より、求める面積は

$$A = \int_p^{\frac{p+q}{2}} \{(-2px + p^2 + b) - (-x^2 + b)\} dx + \int_{\frac{p+q}{2}}^q \{(-2qx + q^2 + b) - (-x^2 + b)\} dx$$

$$= \int_p^{\frac{p+q}{2}} (x - p)^2 dx + \int_{\frac{p+q}{2}}^q (x - q)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - p)^3 \right]_p^{\frac{p+q}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x - q)^3 \right]_{\frac{p+q}{2}}^q$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{q - p}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{p - q}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{12} (q - p)^3$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (2\sqrt{3})^3$$

$$= 2\sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A = 2\sqrt{3}$$

(3)

ℓ と x 軸の交点の座標は $\left(\frac{p^2 + b}{2p}, 0\right)$ 、 m と x 軸の交点の座標は $\left(\frac{q^2 + b}{2q}, 0\right)$ である。また、 ℓ と

m の交点の座標は $\left(\frac{p + q}{2}, b + \frac{1}{4}\right)$ であるから、

$$B = \frac{1}{2} \left| \frac{p^2 + b}{2p} - \frac{q^2 + b}{2q} \right| \left| b + \frac{1}{4} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{p^2 q - pq^2 - bp + bq}{2pq} \right| \left| b + \frac{1}{4} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{(q - p)(b - pq)}{-2pq} \right| \left| b + \frac{1}{4} \right|$$

$$= 2\sqrt{3} \left| b + \frac{1}{4} \right|^2$$

$$= 2\sqrt{3} \left(b + \frac{1}{4} \right)^2$$

である。したがって、

$$A = B$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(b + \frac{1}{4} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(b + \frac{1}{4} \right)^2 = 1$$

$$\therefore b = -\frac{5}{4} \left(\because b < -\frac{1}{4} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad b = -\frac{5}{4}$$