

〔I〕

z は点1と点 i を結ぶ線分上にあるから、実数 s, t ($s \geq 0, t \geq 0, s+t=1$)を用いて

$$z = s \cdot 1 + t \cdot i = s + ti$$

とおける。これより、

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{s+ti} = \frac{s-ti}{s^2+t^2} = \frac{s}{s^2+t^2} - \frac{t}{s^2+t^2}i$$

となるから、 w の実部、虚部をそれぞれ X, Y とおくと $X = \frac{s}{s^2+t^2}, Y = \frac{-t}{s^2+t^2}$ となる。ただし、

$s \geq 0, t \geq 0$ より

$$X \geq 0, Y \leq 0$$

を満たす。ここで、

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{s}{s^2+t^2} \right)^2 + \left(\frac{-t}{s^2+t^2} \right)^2 = \frac{1}{s^2+t^2}$$

であり、これより、

$$X^2 + Y^2 > 0$$

であるから、

$$\begin{cases} X = \frac{s}{s^2+t^2} \\ Y = \frac{-t}{s^2+t^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{X}{X^2+Y^2} & \dots \textcircled{1} \\ t = \frac{-Y}{X^2+Y^2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が得られる。①、②を辺々足し合わせると、

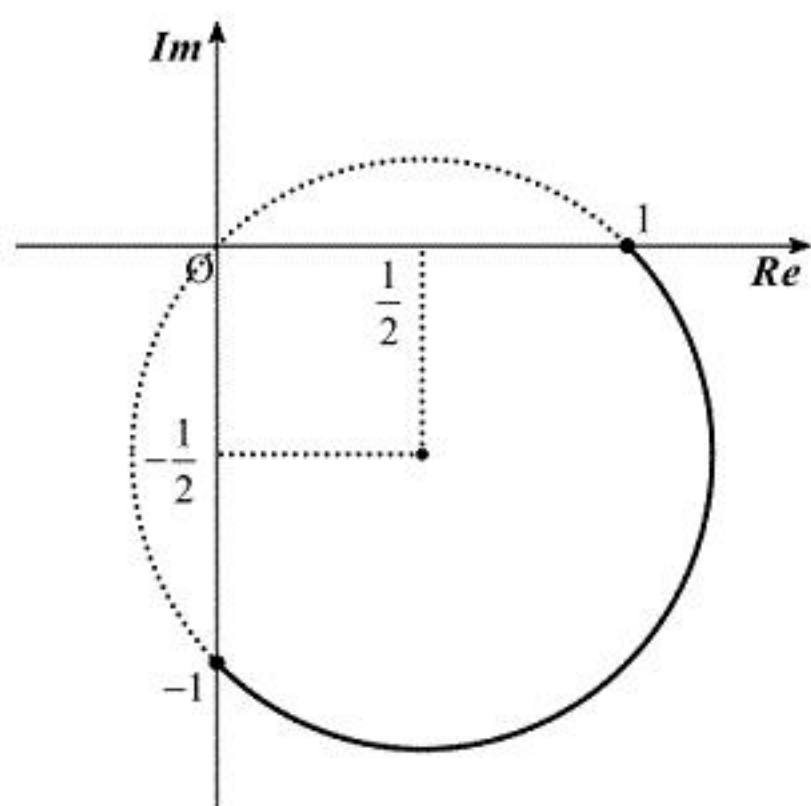
$$s+t = \frac{X}{X^2+Y^2} + \frac{-Y}{X^2+Y^2} \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

が得られる。以上より、点 w は xy 平面上で円 $\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$ の周上のうち、原点を除

いた $x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ の部分動く。すなわち、点 w は複素数平面上で点 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ を中心とし

た半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円周上のうち、原点を除いた実部が0以上かつ虚部が0以下の部分動く。図示

すると、以下の実線部になる。(ただし、原点は除く)



(答) 前図の実線部 (ただし原点は除く)

〔Ⅱ〕

(1)

点 H は直線 BC 上の点であるから、実数 t を用いて $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$ とおける。

$\overrightarrow{AB} = (6, 0, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 2)$ であるから、 $\overrightarrow{AH}$ を成分表示すると

$$\overrightarrow{AH} = (2+4t, 4-4t, 2-8t)$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{AH}$ は $\overrightarrow{BC} = (-4, 4, 8)$ と垂直であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2+4t, 4-4t, 2-8t) \cdot (-4, 4, 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2+4t) \cdot (-4) + (4-4t) \cdot 4 + (2-8t) \cdot 8 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

と分かる。以上より、 $\overrightarrow{AH} = (3, 3, 0)$ であり、 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (0, 0, 1)$ と求められる。

(答) $\overrightarrow{OH} = (0, 0, 1)$

(2)

$\vec{v}$ が平面 ABC に垂直であるから、

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) \cdot (6, 0, -6) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6v_1 - 6v_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow v_1 &= v_3 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が得られる。同様に

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) \cdot (2, 4, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2v_1 + 4v_2 + 2v_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow v_1 + 2v_2 + v_3 &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。①、②より、 $v_2 = -v_1$, $v_3 = v_1$ であるから、 $\vec{v} = (v_1, -v_1, v_1)$ と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{v_1^2 + (-v_1)^2 + v_1^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{v_1^2} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore v_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because v_1 > 0)\end{aligned}$$

であるから、 $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ となる。

(答) $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(3)

BC $\perp$ HP であるから、辺 BC を底辺と見ると線分 HP は三角形 PBC の高さに等しい。ここで、

HP = $d = 2$ であり、 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}$ であるから、三角形 PBC の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot HP = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 2 = 4\sqrt{6}$$

である。

(答) $4\sqrt{6}$

(4)

(3)と同様に、三角形 PBC の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot d = 2\sqrt{6}d$$

である。ここで、(1), (2)より

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OH} + d\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}d, -\frac{\sqrt{3}}{3}d, \frac{\sqrt{3}}{3}d + 1\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \left(-3 - \frac{\sqrt{3}}{3}d, -3 + \frac{\sqrt{3}}{3}d, -\frac{\sqrt{3}}{3}d\right) \\ \overrightarrow{PB} &= \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}d, -3 + \frac{\sqrt{3}}{3}d, -6 - \frac{\sqrt{3}}{3}d\right) \\ \overrightarrow{PC} &= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}d, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}d, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}d\right)\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}|^2 &= d^2 + 18 \\ |\overrightarrow{PB}|^2 &= d^2 + 54 \\ |\overrightarrow{PC}|^2 &= d^2 + 6 \\ \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = d^2\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 |\overrightarrow{PB}|^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(d^2 + 18)(d^2 + 54) - (d^2)^2} \\ &= 3\sqrt{2d^2 + 27} \\ U &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(d^2 + 18)(d^2 + 6) - (d^2)^2} \\ &= \sqrt{6d^2 + 27}\end{aligned}$$

が得られる。以上より、

$$\begin{aligned}S^2 &= T^2 - U^2 \\ \Leftrightarrow 24d^2 &= 9(2d^2 + 27) - (6d^2 + 27) \\ \Leftrightarrow d^2 &= 18 \\ \therefore d &= 3\sqrt{2} \quad (\because d > 0)\end{aligned}$$

である。

(答) $d = 3\sqrt{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$f(x)=x^{2n+1}e^{-x^2} \text{ とおくと, その導関数は}$$

$$f'(x)=(2n+1)x^{2n}e^{-x^2}+x^{2n+1}\cdot(-2x)e^{-x^2}$$

$$=2x^{2n}e^{-x^2}\left(\frac{2n+1}{2}-x^2\right)$$

であるから, $f'(x)=0$ を満たす x は $x=0, \pm\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ である。以下に増減表を示す。

x	...	$-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$	...	0	...	$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

上表より, 関数 $f(x)$ は $x=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ で極大値

$$f\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right)=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}}e^{-\frac{2n+1}{2}}=\left(\frac{2n+1}{2e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

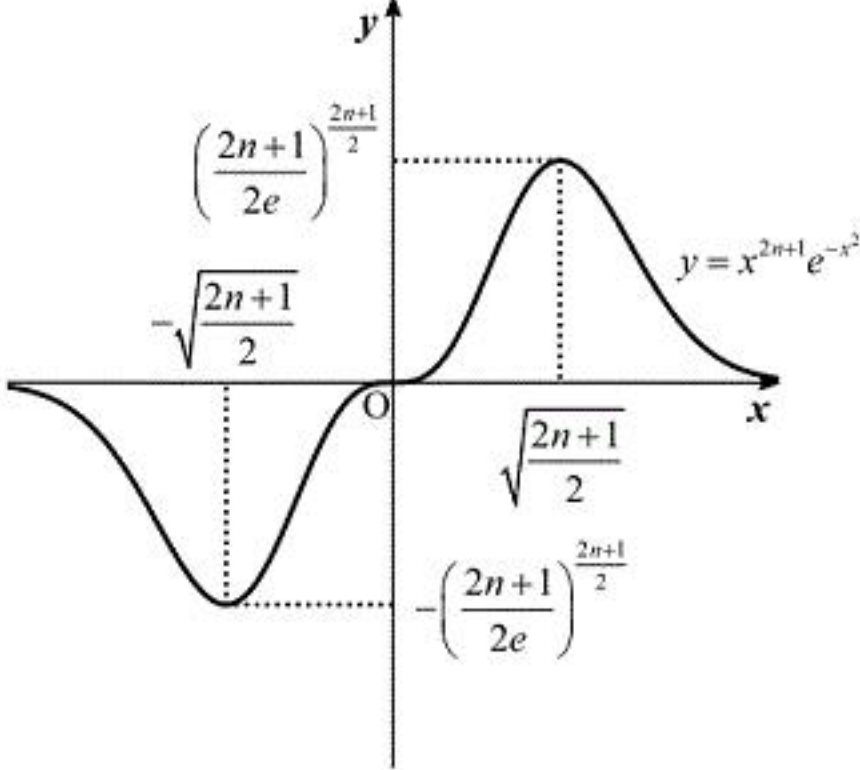
をとり, $x=-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ で極小値

$$f\left(-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right)=-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}}e^{-\frac{2n+1}{2}}=-\left(\frac{2n+1}{2e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

をとる。問題文より,

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty}f(x)=\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(x^2)^{n+1}}{e^{x^2}}\right\}=0$$

と分かるから, グラフは以下のようになる。



(答) 極大値： $\left(\frac{2n+1}{2e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$, 極小値： $-\left(\frac{2n+1}{2e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$, グラフ：前図

(2)

$n=0$ のとき,

$$\int_0^rx^0e^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^r=\frac{1}{2}(1-e^{-r^2})$$

であるから, $I_0=\lim_{r\rightarrow\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-r^2})=\frac{1}{2}$ である。また, $n=1$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^rx^3e^{-x^2}dx&=\int_0^rx^2\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)'dx\\&=\left[x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^r-\int_0^r2x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx\\&=-\frac{1}{2}r^2e^{-r^2}+\int_0^rx^0e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

であるから, $I_1=\lim_{r\rightarrow\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{e^{r^2}}\right)+I_0=0+I_0=\frac{1}{2}$ である。

(答) $I_0=\frac{1}{2}, I_1=\frac{1}{2}$

(3)

0 以上の整数 n に対して

$$\begin{aligned}\int_0^rx^{2n+3}e^{-x^2}dx&=\int_0^rx^{2n+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)'dx\\&=\left[x^{2n+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^r-\int_0^r(2n+2)x^{2n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx\\&=-\frac{1}{2}r^{2n+2}e^{-r^2}+(n+1)\int_0^rx^{2n+1}e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

であるから, $I_{n+1}=\lim_{r\rightarrow\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^{2n+2}}{e^{r^2}}\right)+(n+1)I_n=(n+1)I_n$ が成立する。これより, $n\geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}I_n&=nI_{n-1}\\&=n(n-1)I_{n-2}\\\vdots\\&=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot I_0\\&=\frac{n!}{2}\end{aligned}$$

である。この式に $n=0$ を代入すると $I_0=\frac{1}{2}$ に一致するから, 0 以上の整数 n に対して $I_n=\frac{n!}{2}$

である。

(答) $I_n=\frac{n!}{2}$

〔Ⅳ〕

(1)

2つの曲線の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^3 - x &= t^3 x^3 - tx \\ \Leftrightarrow (t-1)x(x^2 - t^2 - t - 1) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。 $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であるから, この解は $x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$ ($\because t \neq 1$) である。

以上より,

$$\begin{aligned} F(t) &= \left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}} \left\{ (x^3 - x) - (t^3 x^3 - tx) \right\} dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1-t^3}{4} x^4 - \frac{1-t}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}} \right| \\ &= \left| \frac{1-t^3}{4(t^2 + t + 1)^2} - \frac{1-t}{2(t^2 + t + 1)} \right| \\ &= \frac{|1-t|}{4(t^2 + t + 1)} \quad (\because t^2 + t + 1 > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad F(t) = \frac{|1-t|}{4(t^2 + t + 1)}$$

(2)

t の範囲によって場合分けを行う。

[1] $t < 1$ のとき

$$F(t) = \frac{1-t}{4(t^2 + t + 1)} \text{ であるから,}$$

$$F'(t) = \frac{-1 \cdot (t^2 + t + 1) - (1-t)(2t+1)}{4(t^2 + t + 1)^2} = \frac{(t-1-\sqrt{3})(t-1+\sqrt{3})}{4(t^2 + t + 1)^2}$$

となる。 $t < 1$ の範囲で $F'(t) = 0$ を満たす t は $t = 1 - \sqrt{3}$ である。

[2] $t > 1$ のとき

$$F(t) = \frac{t-1}{4(t^2 + t + 1)} \text{ であるから,}$$

$$F'(t) = - \left(\frac{1-t}{4(t^2 + t + 1)} \right)' = - \frac{(t-1-\sqrt{3})(t-1+\sqrt{3})}{4(t^2 + t + 1)^2}$$

となる。 $t > 1$ の範囲で $F'(t) = 0$ を満たす t は $t = 1 + \sqrt{3}$ である。

以上[1], [2]より, $F(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	...	$1 - \sqrt{3}$	...	1	...	$1 + \sqrt{3}$	...
$F'(t)$	+	0	-		+	0	-
$F(t)$	↗	極大	↘		↗	極大	↘

上表より, 関数 $F(t)$ は $t = 1 - \sqrt{3}$ で極大値

$$F(1 - \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3} + 3}{12}$$

をとり, $t = 1 + \sqrt{3}$ で極大値

$$F(1 + \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3} - 3}{12}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値: } \frac{2\sqrt{3} + 3}{12}, \frac{2\sqrt{3} - 3}{12}$$