

〔Ⅰ〕

(1)

$w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$ であるため、 $z = x + iy$, $w = u + iv$ を $z = \frac{1}{w}$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} x + iy &= \frac{1}{u + iv} \\ &= \frac{u - iv}{(u + iv)(u - iv)} \\ &= \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

となる。両辺の実部と虚部を比較すると、 x, y, u, v は実数であるから、

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

(2)

点 z は 2 点 $z_1 = 1$ と $z_2 = i$ を結ぶ線分上を動くから、点 z は実数 k ($0 \leq k \leq 1$) を用いて、 $z = k + i(1 - k)$ と表せる。(1)の結果を用いると、点 w を $w = u + iv$ と表すとき、

$$k = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$1 - k = -\frac{v}{u^2 + v^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

の 2 式が成立する。ここで、実数 k は $0 \leq k \leq 1$ を満たすから、①、②より、

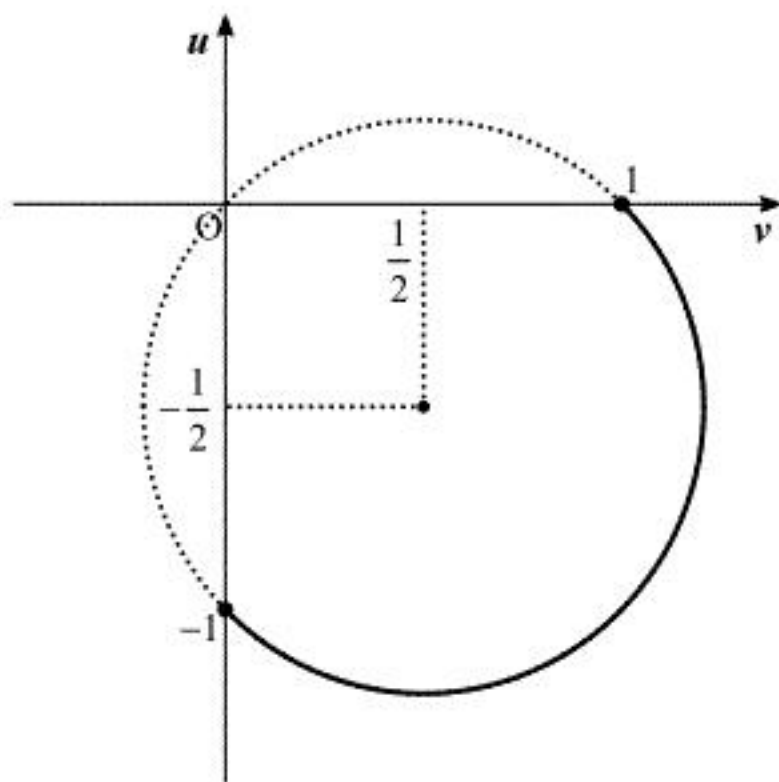
$$0 \leq u, v \leq 0$$

が成り立つ。ただし、 $u = v = 0$ は除く。また、式①、②の辺々を足して k を消去すると、

$$\begin{aligned} k + (1 - k) &= \frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{v}{u^2 + v^2} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{u - v}{u^2 + v^2} \\ \Leftrightarrow u^2 + v^2 &= u - v \\ \Leftrightarrow u^2 - u + v^2 + v &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。以上より、点 w が描く図形は中心 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である円の第 4 象限の部分である。

である。図を描くと以下の実線部のようになる。ただし、原点を除く。



(答) 前図 (ただし、原点を除く)

【Ⅱ】

(1)

点Hは直線BC上にあるため、 $\overrightarrow{OH}$ は実数 k を用いて、 $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OB}+(1-k)\overrightarrow{OC}$ と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\left\{\left(k\overrightarrow{OB}+(1-k)\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OA}\right\}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\left\{(3k,-3k,-5k)+(-(1-k),1-k,3(1-k))-(-3,-3,1)\right\}\cdot(-1-3,1+3,3+5)\\&=(4k+2,-4k+4,-8k+2)\cdot(-4,4,8)\\&=-4(4k+2)+4(-4k+4)+8(-8k+2)\\&=-96k+24\end{aligned}$$

である。 $AH\perp BC$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=0\\&\Leftrightarrow -96k+24=0\\&\therefore k=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

が得られる。よって、 $\overrightarrow{OH}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{1}{4}(3,-3,-5)+\frac{3}{4}(-1,1,3)\\&=(0,0,1)\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\overrightarrow{OH}=(0,0,1)$

(2)

$\vec{v}$ は平面ABCと垂直であるため、 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}&=0\\&\Leftrightarrow (v_1,v_2,v_3)\cdot(6,0,-6)=0\\&\Leftrightarrow 6v_1-6v_3=0\\&\Leftrightarrow v_1=v_3\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\\\vec{v}\cdot\overrightarrow{AC}&=0\\&\Leftrightarrow (v_1,v_2,v_3)\cdot(2,4,2)=0\\&\Leftrightarrow 2v_1+4v_2+2v_3=0\\&\Leftrightarrow v_1+2v_2+v_3=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、 $v_2=-v_1$ 、 $v_3=v_1$ が得られ、 $\vec{v}$ は $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=v_1(1,-1,1)$ と表せる。また、

$|\vec{v}|=1$ より、

$$\begin{aligned}|\vec{v}|&=1\\&\Leftrightarrow |v_1|\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=1\\&\Leftrightarrow \sqrt{3}|v_1|=1\\&\Leftrightarrow |v_1|=\frac{1}{\sqrt{3}}\\&\therefore v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\ (\because v_1>0)\end{aligned}$$

である。以上より、 $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ と求まる。

(答) $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(3)

$\vec{v}$ は平面ABCに垂直であるから、 $\vec{v}\perp\overrightarrow{BC}$ である。また、 $d=2$ であるから $\overrightarrow{HP}=2\vec{v}$ と表せる。これより、三角形PBCは底辺BC、高さHPの三角形である。ここで、

$$\begin{aligned}BC&=\sqrt{(-1-3)^2+(1+3)^2+(3+5)^2}\\&=\sqrt{16+16+64}\\&=4\sqrt{6}\end{aligned}$$

であるから、三角形PBCの面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}BC\cdot HP&=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}\cdot 2\\&=4\sqrt{6}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $4\sqrt{6}$

(4)

(3)と同様に、三角形PBCの面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}\cdot d=2\sqrt{6}d$$

である。ここで、(1)、(2)より

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{OH}+d\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d,-\frac{\sqrt{3}}{3}d,\frac{\sqrt{3}}{3}d+1\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}&=\left(-3-\frac{\sqrt{3}}{3}d,-3+\frac{\sqrt{3}}{3}d,-\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)\\\overrightarrow{PB}&=\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}d,-3+\frac{\sqrt{3}}{3}d,-6-\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)\\\overrightarrow{PC}&=\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}d,1+\frac{\sqrt{3}}{3}d,2-\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}|^2&=d^2+18\\|\overrightarrow{PB}|^2&=d^2+54\\|\overrightarrow{PC}|^2&=d^2+6\\\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=d^2\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PB}|^2-(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(d^2+18)(d^2+54)-(d^2)^2}\\&=3\sqrt{2d^2+27}\\U&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PC}|^2-(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(d^2+18)(d^2+6)-(d^2)^2}\\&=\sqrt{6d^2+27}\end{aligned}$$

が得られる。以上より、

$$\begin{aligned}S^2&=T^2-U^2\\&\Leftrightarrow 24d^2=9(2d^2+27)-(6d^2+27)\\&\Leftrightarrow d^2=18\\&\therefore d=3\sqrt{2}\ (\because d>0)\end{aligned}$$

である。

(答) $d=3\sqrt{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

$f(x) = x^3 e^{-x^2}$ とおく。 $f(x)$ の導関数を求めると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' e^{-x^2} + x^3 (e^{-x^2})' \\ &= 3x^2 e^{-x^2} + x^3 \cdot (-2xe^{-x^2}) \\ &= x^2 (3 - 2x^2) e^{-x^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f'(x) = 0$ を満たすのは $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, 0$ である。以上より、増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

ここで、極小値は、

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 e^{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = -\frac{3\sqrt{6}}{4} e^{\frac{3}{2}}$$

であり、極大値は

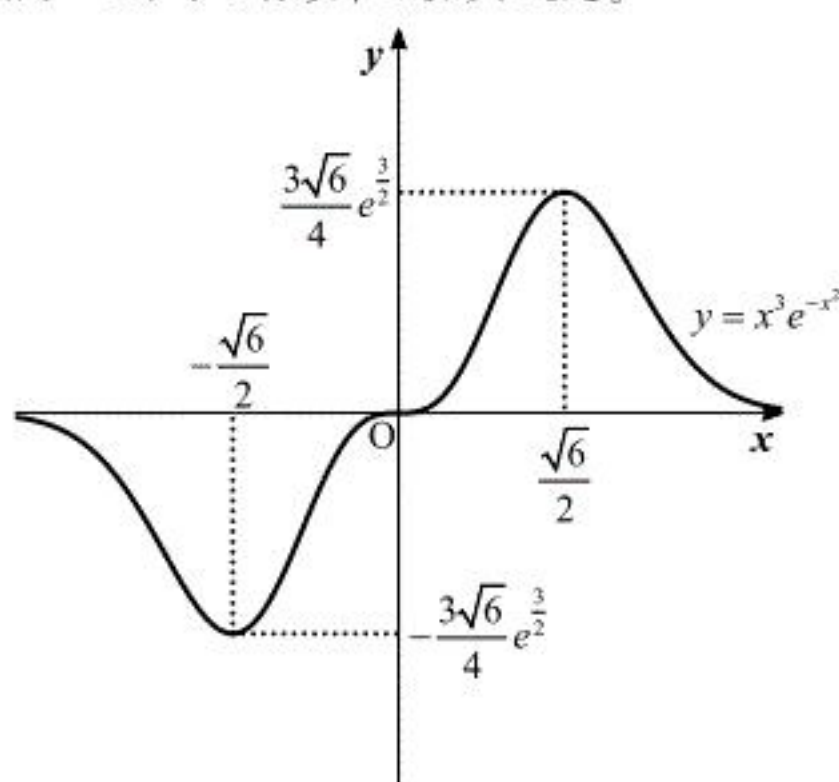
$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{4} e^{\frac{3}{2}}$$

である。また、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}} = 0$$

であるから、関数 $y = x^3 e^{-x^2}$ のグラフは以下のようになる。



(答) 極小値： $-\frac{3\sqrt{6}}{4} e^{\frac{3}{2}}$ ，極大値： $\frac{3\sqrt{6}}{4} e^{\frac{3}{2}}$ ，グラフ：前図

(2)

まず、部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} \int_0^r x^3 e^{-x^2} dx &= \int_0^r \left(-\frac{1}{2} x^2\right) (e^{-x^2})' dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2}\right]_0^r - \int_0^r \left(-\frac{1}{2} x^2\right)' e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} r^2 e^{-r^2} + \int_0^r x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} r^2 e^{-r^2} - \frac{1}{2} \int_0^r (e^{-x^2})' dx \\ &= -\frac{1}{2} r^2 e^{-r^2} - \frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^r \\ &= -\frac{1}{2} r^2 e^{-r^2} - \frac{1}{2} e^{-r^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x^3 e^{-x^2} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{e^{r^2}} - \frac{1}{2} e^{-r^2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$

〔Ⅳ〕

(1)

まず, $t \neq 1$ に注意して 2 曲線 $y = x^3 - x$ と $y = t^3 x^3 - tx$ の交点の x 座標を求めると,

$$\begin{aligned} x^3 - x &= t^3 x^3 - tx \\ \Leftrightarrow (t^3 x^3 - x^3) - (tx - x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^3 - 1)x^3 - (t - 1)x &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 1)x^3 - (t - 1)x &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)x\{(t^2 + t + 1)x^2 - 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}} \end{aligned}$$

となるから, $x \geq 0$ における交点の x 座標は $x = 0, \frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$ である。ここで, 区間 $0 \leq x \leq$

$\frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$ において,

$$(t^3 x^3 - tx) - (x^3 - x) = (t - 1)x\{(t^2 + t + 1)x^2 - 1\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} t > 1 \text{ のとき, } x^3 - x &\geq t^3 x^3 - tx \\ t < 1 \text{ のとき, } x^3 - x &\leq t^3 x^3 - tx \end{aligned}$$

となる。以下, 2 曲線 $y = x^3 - x$ と $y = t^3 x^3 - tx$ で囲まれた部分の面積 $F(t)$ について, t の値によって場合分けを行う。

[1] $t > 1$ のとき

面積 $F(t)$ は,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}} \{(x^3 - x) - (t^3 x^3 - tx)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}} \{(1 - t^3)x^3 - (1 - t)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(1 - t^3)x^4 - \frac{1}{2}(1 - t)x^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}} \\ &= \frac{1 - t^3}{4(t^2 + t + 1)^2} - \frac{1 - t}{2(t^2 + t + 1)} \\ &= \frac{1 - t}{4(t^2 + t + 1)} - \frac{1 - t}{2(t^2 + t + 1)} \\ &= \frac{t - 1}{4(t^2 + t + 1)} \end{aligned}$$

となる。

[2] $t < 1$ のとき

面積 $F(t)$ は,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}} \{(t^3 x^3 - tx) - (x^3 - x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}} \{(t^3 - 1)x^3 - (t - 1)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(t^3 - 1)x^4 - \frac{1}{2}(t - 1)x^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}} \\ &= \frac{t^3 - 1}{4(t^2 + t + 1)^2} - \frac{t - 1}{2(t^2 + t + 1)} \\ &= \frac{t - 1}{4(t^2 + t + 1)} - \frac{t - 1}{2(t^2 + t + 1)} \\ &= \frac{-t + 1}{4(t^2 + t + 1)} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より, $F(t)$ は,

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t - 1}{4(t^2 + t + 1)} & (t > 1) \\ \frac{1 - t}{4(t^2 + t + 1)} & (t < 1) \end{cases}$$

である。

(答) 前述

(2)

t の値によって場合分けを行う。

[1] $t > 1$ のとき

$$F(t) = \frac{t - 1}{4(t^2 + t + 1)} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{(t - 1)'(t^2 + t + 1) - (t - 1)(t^2 + t + 1)'}{4(t^2 + t + 1)^2} \\ &= \frac{(t^2 + t + 1) - (t - 1)(2t + 1)}{4(t^2 + t + 1)^2} \\ &= \frac{-t^2 + 2t + 2}{4(t^2 + t + 1)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで, $t > 1$ において $F'(t) = 0$ を解くと, $t = 1 + \sqrt{3}$ である。

[2] $t < 1$ のとき

$$F(t) = \frac{-t + 1}{4(t^2 + t + 1)} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{(-t + 1)'(t^2 + t + 1) - (-t + 1)(t^2 + t + 1)'}{4(t^2 + t + 1)^2} \\ &= \frac{-(t^2 + t + 1) - (-t + 1)(2t + 1)}{4(t^2 + t + 1)^2} \\ &= \frac{t^2 - 2t - 2}{4(t^2 + t + 1)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで, $t < 1$ において $F'(t) = 0$ を解くと, $t = 1 - \sqrt{3}$ である。

以上[1], [2]より, 関数 $F(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	...	$1 - \sqrt{3}$	...	1	...	$1 + \sqrt{3}$	...
$F'(x)$	+	0	-		+	0	-
$F(x)$		極大				極小	

増減表より, 関数 $F(t)$ は $t = 1 + \sqrt{3}$ のとき, 極小値

$$\begin{aligned} F(1 + \sqrt{3}) &= \frac{(1 + \sqrt{3}) - 1}{4\{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3}) + 1\}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{12} \end{aligned}$$

をとり, $t = 1 - \sqrt{3}$ のとき, 極大値

$$\begin{aligned} F(1 - \sqrt{3}) &= \frac{-(1 - \sqrt{3}) + 1}{4\{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3}) + 1\}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12(2 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{12} \end{aligned}$$

をとる。

(答) 極小値: $\frac{2\sqrt{3} - 3}{12}$, 極大値: $\frac{2\sqrt{3} + 3}{12}$