

〔I〕

(1)

9つの格子点から3つの点を選ぶので、求める選び方は

$${}_9C_3 = 84 \text{ (通り)}$$

と求まる。

(答) 84通り

(2)

選ばれた3点が三角形をなさないのは3点が一直線上に並ぶときである。その場合の数は、 x 軸に平行なものが3通り、 y 軸に平行なものが3通り、傾きが1または-1であるものがそれぞれ1通りの、合計8通りである。各組合せとなる確率は同様に確からしいので、求める確率は

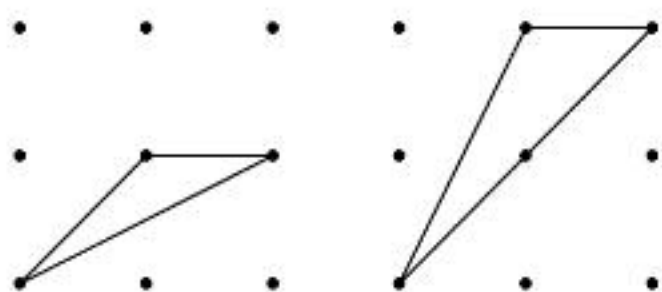
$$\frac{84-8}{84} = \frac{19}{21}$$

となる。

(答) $\frac{19}{21}$

(3)

選ばれた3点が鈍角三角形をなすのは、3点を結んで作られた三角形が下図の2種類の三角形と合同である場合のみである。



上のいずれの三角形についても、 90° ずつ回転させたものが4通り存在し、それぞれを表裏反転した2通りが考えられる。さらに上図左の三角形は平行移動したものが2通り存在する。以上より選ばれた3点が鈍角三角形をなすのは

$$4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

である。3点が各組合せとなる確率は同様に確からしいので、求める確率は

$$\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

となる。

(答) $\frac{2}{7}$

〔Ⅱ〕

(1)

$n \geq 1$ であるから、

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{2n+2}{n} a_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$$

と変形できる。ここで、 $x_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと上の漸化式は

$$x_{n+1} = 2x_n$$

と表され、

$$x_1 = \frac{a_1}{1} = 2$$

であるため、 $\{x_n\}$ は初項 $x_1 = 2$ 、公比 2 の等比数列となる。よって、

$$x_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{n} = 2^n$$

$$\therefore a_n = n \cdot 2^n$$

となる。

(答) $a_n = n \cdot 2^n$

(2)

$S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$ であるから、

$$\begin{aligned} S_n - 2S_n &= \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k - \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) \cdot 2^k \\ &= \sum_{k=2}^n 2^k + 1 \cdot 2^1 - n \cdot 2^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k - 2^1 + 2 - n \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1} \\ &= -(n-1) \cdot 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

となる。

(答) $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

(3)

$T_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \cdot 2^k$ であるから、

$$\begin{aligned} T_n - 2T_n &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \cdot 2^k - \sum_{k=2}^{n+1} \{(k-1)^2 + 1\} \cdot 2^k \\ &= \sum_{k=2}^n (2k-1) \cdot 2^k + 2 \cdot 2 - (n^2 + 1) \cdot 2^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot 2^k - 2 + 4 - (n^2 + 1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2S_n - \sum_{k=1}^n 2^k + 2 - (n^2 + 1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2\{(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2\} - (2^{n+1} - 2) + 2 - (n^2 + 1) \cdot 2^{n+1} \\ &= -(n^2 - 2n + 4) \cdot 2^{n+1} + 8 \end{aligned}$$

$$\therefore T_n = (n^2 - 2n + 4) \cdot 2^{n+1} - 8$$

である。

(答) $T_n = (n^2 - 2n + 4) \cdot 2^{n+1} - 8$

〔Ⅲ〕

(1)

製品 X を x kg 販売して得られる利益は px 万円，製品 Y を y kg 販売して得られる利益は qy 万円であるから，工場の利益は $px+qy$ 万円と表される。

(答) $px+qy$ 万円

(2)

原料 A と原料 B の使用量上限に関する不等式はそれぞれ

$$x+2y \leq 10$$

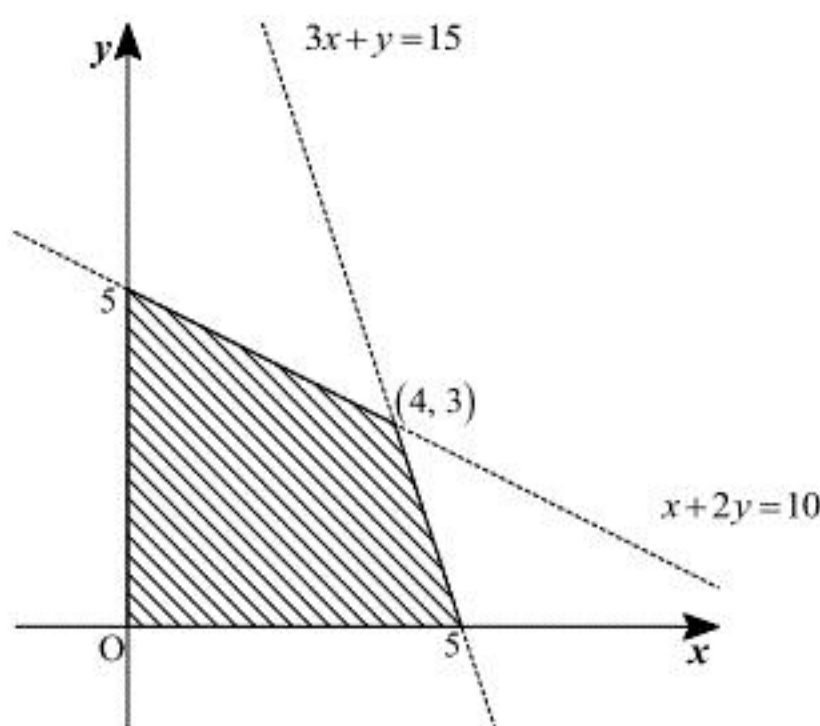
$$3x+y \leq 15$$

である。なおこの 2 領域の境界線の交点は

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x+y=15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (4, 3)$$

である。また条件より $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ であるから，これら不等式が表す領域は下図の斜線部となる。ただし，境界を含む。



(答) 連立不等式

$$\begin{cases} x+2y \leq 10 \\ 3x+y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

領域

上図の斜線部。ただし境界を含む。

(3)

k を工場の利益を表す実数であるとする。 $p=5, q=4$ のとき工場の利益について

$$5x+4y=k$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{k}{4}$$

という方程式が立てられる。このとき k を最大にする (x, y) を求める。上式は傾きが $-\frac{5}{4}$ ， y

切片が $\frac{k}{4}$ の直線を表す。(2)の領域の境界をなす 2 直線 $3x+y=15$ ， $x+2y=10$ の傾きはそれぞれ

$-3, -\frac{1}{2}$ であり $-3 < -\frac{5}{4} < -\frac{1}{2}$ であることに注意すると，直線 $y = -\frac{5}{4}x + \frac{k}{4}$ が(2)の領域を通り，

かつ y 切片が最大となるのはこの直線が点 $(4, 3)$ を通るときである。よって $(x, y) = (4, 3)$ である。

(答) $(4, 3)$

(4)

$p > 0, q > 0$ であることに注意すると，(3)と同様に，利益は実数 k を用いて

$$px+qy=k$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{p}{q}x + \frac{k}{q}$$

と表される。どちらか 1 種類の製品のみを生産することが工場の利益を最大にするのは，上の表す直線が(2)の領域を通り，かつ点 $(5, 0)$ または $(0, 5)$ を通るとき直線の y 切片が最大となる

ときである。すなわち，直線 $y = -\frac{p}{q}x + \frac{k}{q}$ の傾き $-\frac{p}{q}$ が $-\frac{1}{2}$ より大きい，もしくは -3 より小

さい場合である。ゆえに，求める条件は

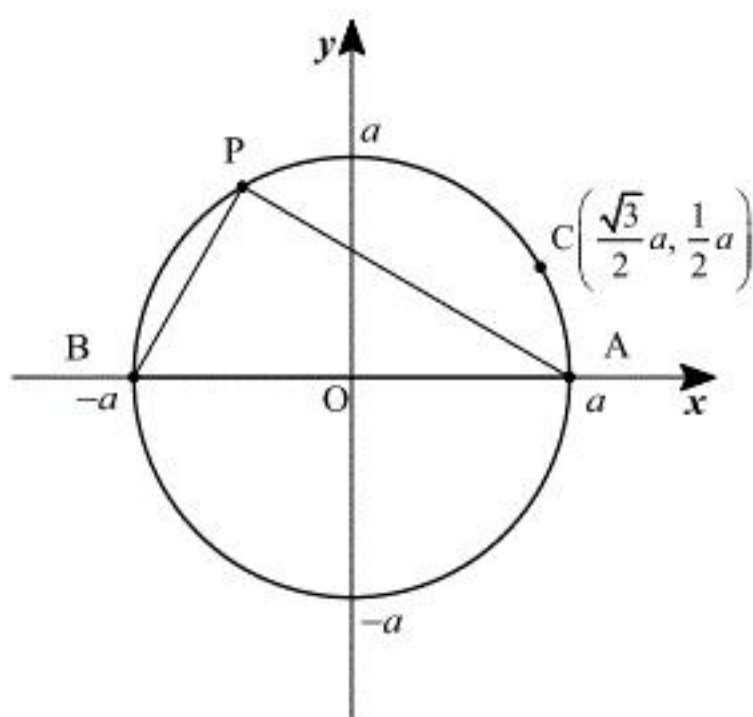
$$0 < p < \frac{q}{2} \text{ または } p > 3q$$

である。

(答) $0 < p < \frac{q}{2}$ または $p > 3q$

〔Ⅳ〕

(1)



点Pは毎分5回転の速さで円周上を動くため、1秒に $\frac{\pi}{6}$ 回転する。よって、 t 秒後の点Pの座

標は $\left(a \cos \frac{\pi}{6}t, a \sin \frac{\pi}{6}t\right)$ と表されるから、求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \left| a \sin \frac{\pi}{6}t \right| = a^2 \left| \sin \frac{\pi}{6}t \right|$$

となる。

(答) $a^2 \left| \sin \frac{\pi}{6}t \right|$

(2)

点C $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$ について

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right) = \left(a \cos \frac{\pi}{6}, a \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

より $\angle COA = \frac{\pi}{6}$ である。よって点Pが点Cから出発するとき、 t 秒後の点Pの y 座標は、

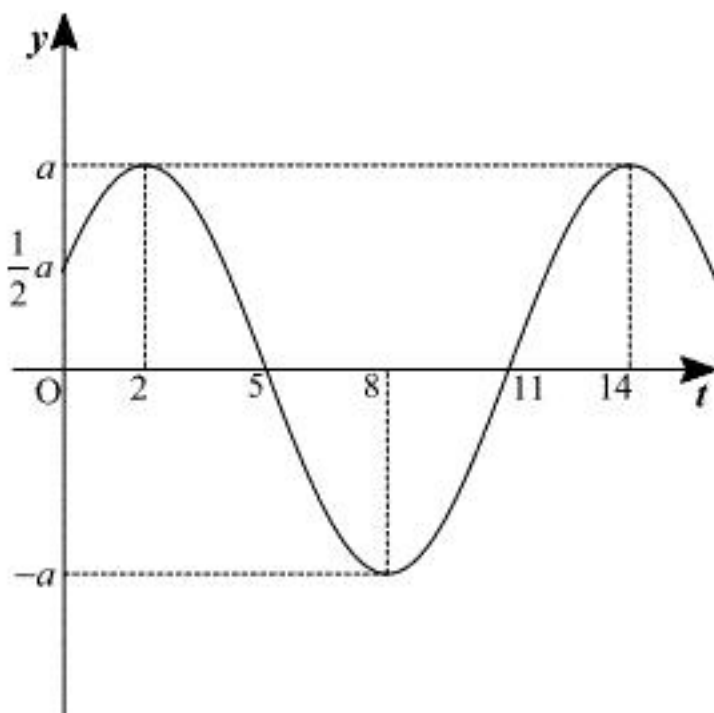
$$a \sin \left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} \right) = a \sin \frac{\pi}{6}(t+1)$$

である。

(答) $a \sin \frac{\pi}{6}(t+1)$

(3)

$y = a \sin \frac{\pi}{6}(t+1)$ のグラフは、 $y = a \sin \frac{\pi}{6}t$ のグラフを t 軸方向に -1 平行移動させたものであるから、下図のようになる。



(答) 上図