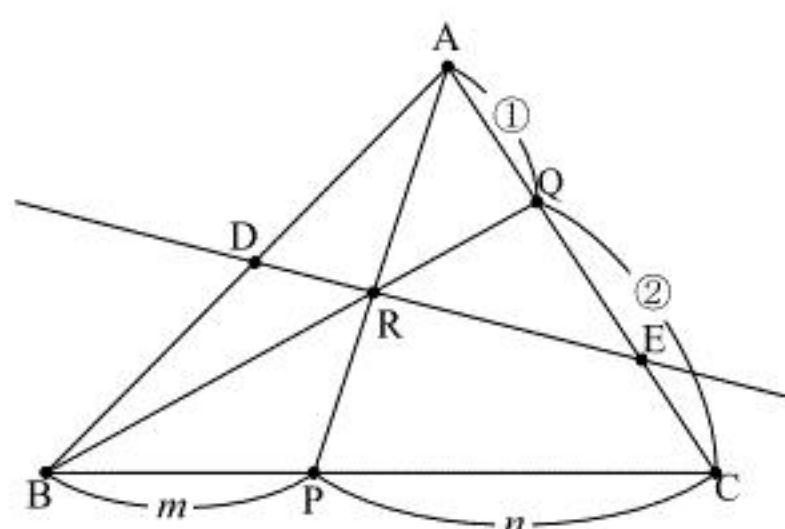


【I】



まず、ベクトル $\overrightarrow{AR}$ を求める。点 R は線分 AP 上にあるため、実数 x ($0 \leq x \leq 1$) を用いて

$$\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{AP}$$

と表せる。一方、点 R は線分 BQ 上にあるため、実数 y ($0 \leq y \leq 1$) を用いて

$$\overrightarrow{AR} = (1-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AQ}$$

と表せる。ここで、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるので、

$$\begin{aligned} x\left(\frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c}\right) &= (1-y)\vec{b} + \frac{y}{3}\vec{c} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{nx}{m+n} - 1 + y\right)\vec{b} + \left(\frac{mx}{m+n} - \frac{y}{3}\right)\vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるので、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{nx}{m+n} - 1 + y = 0 \\ \frac{mx}{m+n} - \frac{y}{3} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+n}{3m+n} \\ y = \frac{3m}{3m+n} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= x\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c} \end{aligned}$$

と求まる。次に、実数 p ($0 \leq p \leq 1$)、 q ($0 \leq q \leq 1$) を用いて、 $\overrightarrow{AD} = p\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AE} = q\vec{c}$ と表す。点

E は直線 DR 上にあるため、実数 r を用いて

$$\overrightarrow{AE} = (1-r)\overrightarrow{AD} + r\overrightarrow{AR}$$

と表せる。(I)より

$$\overrightarrow{AR} = \frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= (1-r)\overrightarrow{AD} + r\overrightarrow{AR} \\ \Leftrightarrow q\vec{c} &= (1-r)p\vec{b} + r\left(\frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c}\right) \\ \Leftrightarrow \left\{(1-r)p + \frac{nr}{3m+n}\right\}\vec{b} + \left\{-q + \frac{mr}{3m+n}\right\}\vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるので、 p を用いて q, r を表すと

$$\begin{aligned} \begin{cases} (1-r)p + \frac{nr}{3m+n} = 0 \\ -q + \frac{mr}{3m+n} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{mp}{(3m+n)p - n} \\ r = \frac{(3m+n)p}{(3m+n)p - n} \end{cases} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} k &= \frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{(3m+n)p - n}{mp} \\ &= \frac{3m+n}{m} + \left(1 - \frac{n}{m}\right)\frac{1}{p} \end{aligned}$$

と変形できる。 k が点 D の線分 AB 上での位置によらず一定であることは、 p の値によらず k の値が一定であることで、それは

$$1 - \frac{n}{m} = 0 \Leftrightarrow m = n$$

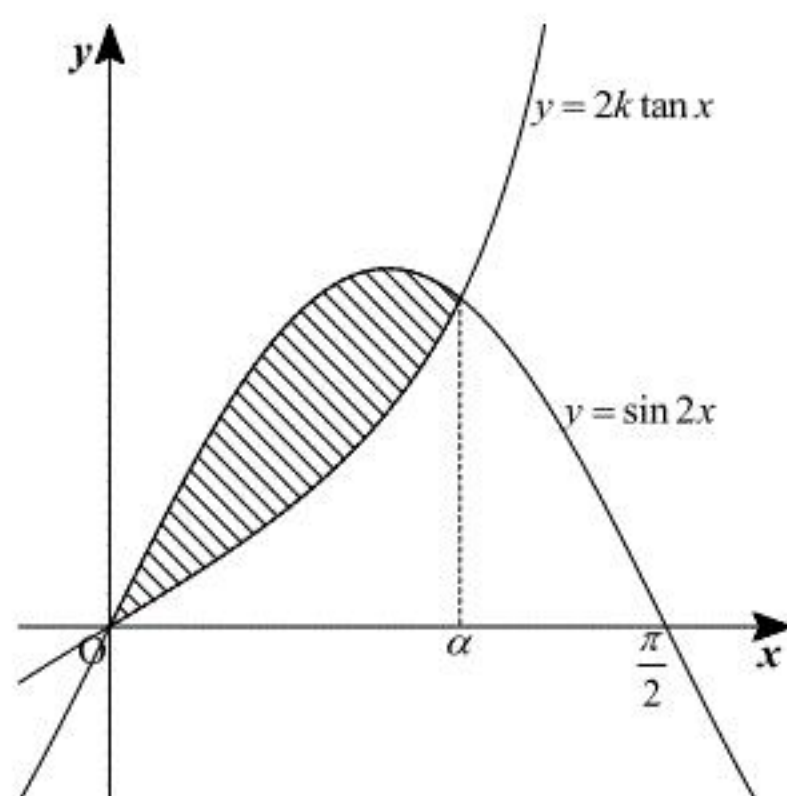
となるときである。このとき

$$\begin{aligned} k &= \frac{3m+n}{m} \\ &= \frac{3m+m}{m} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $m = n$, $k = 4$

〔Ⅱ〕



まず, $y = \sin 2x$ と $y = 2k \tan x$ との $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ での共有点を求める。2式から y を消去すると

$$\sin 2x = 2k \tan x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2k \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (\cos^2 x - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0, \cos^2 x = k$$

である。 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ では

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

である。また $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $0 < \cos x \leq 1$ であることと, $0 < k < 1$ に注意すると

$$\cos^2 x = k \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{k}$$

と求まる。ここで, $\cos x = \sqrt{k}$ を満たす角を α とする。ただし α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数

であるとする。ところで

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\log |\cos x| + C \end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数とする。求める面積 S は上図の斜線部であり,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha (\sin 2x - 2k \tan x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + 2k \log |\cos x| \right]_0^\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + 2k \log \cos \alpha + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) + 2k \log \cos \alpha + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (2k - 1) + 2k \log \sqrt{k} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (2k - 1) + k \log k + \frac{1}{2} \\ &= 1 - k + k \log k \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = 1 - k + k \log k$

〔Ⅲ〕

(1)

与えられた極方程式は、

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\cos\theta}{4-3\cos^2\theta} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4\cos\theta}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta} \\ \Leftrightarrow r(\cos^2\theta+4\sin^2\theta) &= 4\cos\theta \\ \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2 &= 4r\cos\theta \end{aligned}$$

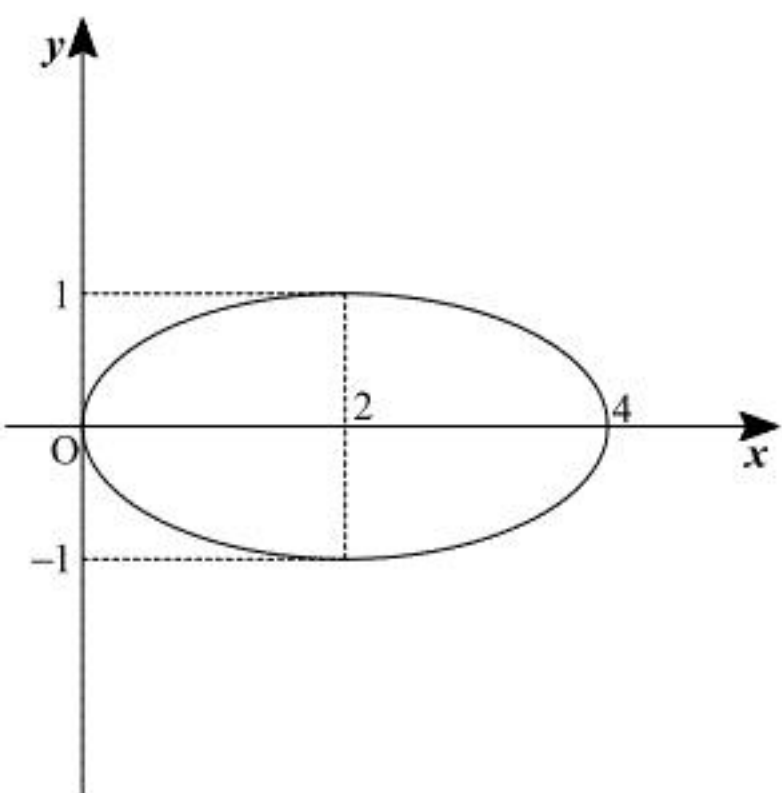
と変形できる。ここで、 $x=r\cos\theta$ 、 $y=r\sin\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} x^2+4y^2 &= 4x \\ \Leftrightarrow (x-2)^2+4y^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$

(2)



曲線 C は上図のような楕円となる。曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに一回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_0^4 \pi y^2 dx &= \pi \int_0^4 \left\{ 1 - \frac{(x-2)^2}{4} \right\} dx \\ &= \pi \left[x - \frac{(x-2)^3}{12} \right]_0^4 \\ &= 4\pi - \frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{8}{3}\pi$

(3)

曲線 C について、

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{4}+y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 4(1-y^2) \\ \Leftrightarrow x-2 &= \pm 2\sqrt{1-y^2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm 2\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

である。ただし $1-y^2 \geq 0$ に注意する。曲線 C の $x \geq 2$ の部分を $x_1 = 2 + 2\sqrt{1-y^2}$ 、曲線 C の

$x \leq 2$ の部分を $x_2 = 2 - 2\sqrt{1-y^2}$ と表すことにする。このとき、曲線 C で囲まれた部分を y 軸

の周りに一回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\pi x_1^2 - \pi x_2^2) dy &= \pi \int_{-1}^1 \left\{ (2+2\sqrt{1-y^2})^2 - (2-2\sqrt{1-y^2})^2 \right\} dy \\ &= 16\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = \sin a$ とおくと、

$$\frac{dy}{da} = \cos a$$

であり a と y は以下のような対応となる。

y	-1	$\rightarrow$	1
a	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

これより、求める体積は

$$\begin{aligned} 16\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 a} \cos a da \\ &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos a| \cos a da \\ &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a da \\ &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2a}{2} da \\ &= 16\pi \left[\frac{1}{2}a + \frac{\sin 2a}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 16\pi \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 8\pi^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $8\pi^2$

〔Ⅳ〕

(1)

点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \therefore y &= f'(t)x - tf'(t) + f(t) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$$

(2)

任意の正数 t に対して, $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$ が成立する。また接線 $y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$ は

点 $P\left(-\int_0^t f(x)dx, 0\right)$ を通るため,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(t)\left(-\int_0^t f(x)dx\right) - tf'(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow \int_0^t f(x)dx &= \frac{f(t)}{f'(t)} - t \quad (\because f'(t) > 0) \end{aligned}$$

となる。両辺を t について微分すると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\{f'(t)\}^2 - f(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2} - 1 \\ \Leftrightarrow f(t)\{f'(t)\}^2 &= -f(t)f''(t) \\ \Leftrightarrow f''(t) &= -\{f'(t)\}^2 \quad (\because f(t) > 0) \end{aligned}$$

となる。ここで, $z = f'(t)$ とおくと上式は $\frac{dz}{dt} = -z^2$ と表せる。 $z > 0$ であることより

$$\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dt} = -1$$

と変形できる。両辺を t について不定積分すると,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z^2} dz &= -\int dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z} &= t + C_1 \end{aligned}$$

と求まる。ただし, C_1 は積分定数である。ここで, $f'(0) = \frac{1}{2}$ であることより, $t = 0$ において

$z = \frac{1}{2}$ となるため, $C_1 = 2$ である。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'(t)} &= t + 2 \\ \Leftrightarrow f'(t) &= \frac{1}{t+2} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

と求まる。ただしこれは $x > 0$ のとき成立することが保証されている。ここで上式を x について微分すると

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

である。これは $x > -2$ において連続な $f(x)$ の第2次導関数である。よって $x > -2$ において

$f'(x) = \frac{1}{x+2}$ が成立する。次に, $f'(x) = \frac{1}{x+2}$ の両辺を x について積分すると,

$$\begin{aligned} \int f'(x)dx &= \int \frac{1}{x+2} dx \\ \Leftrightarrow f(x) &= \log(x+2) + C_2 \quad (\because x+2 > 0) \end{aligned}$$

となる。ただし, C_2 は積分定数である。ここで, $f(0) = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} 0 &= \log 2 + C_2 \\ \Leftrightarrow C_2 &= -\log 2 \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x+2) - \log 2 \\ &= \log \frac{x+2}{2} \end{aligned}$$

と分かる。以上より $f(x)$ の定義域 $x > -2$ における $f'(x)$, $f(x)$ が求まった。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1}{x+2}, \quad f(x) = \log \frac{x+2}{2}$$