

〔I〕

(1)

9つの格子点から3つの点を選ぶので、求める選び方は

$${}_9C_3 = 84 \text{ (通り)}$$

と求まる。

(答) 84通り

(2)

選ばれた3点が三角形をなさないのは3点が一直線上に並ぶときである。その場合の数は、 x 軸に平行なものが3通り、 y 軸に平行なものが3通り、傾きが1または-1であるものがそれぞれ1通りの、合計8通りである。各組合せとなる確率は同様に確からしいので、求める確率は

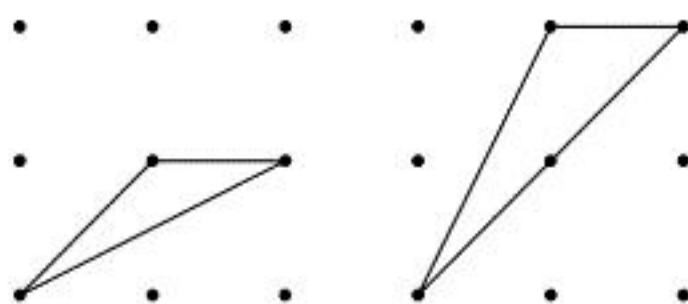
$$\frac{84-8}{84} = \frac{19}{21}$$

となる。

(答) $\frac{19}{21}$

(3)

選ばれた3点が鈍角三角形をなすのは、3点を結んで作られた三角形が下図の2種類の三角形と合同である場合のみである。



上のいずれの三角形についても、 90° ずつ回転させたものが4通り存在し、それぞれを表裏反転した2通りが考えられる。さらに上図左の三角形は平行移動したものが2通り存在する。以上より選ばれた3点が鈍角三角形をなすのは

$$4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

である。3点が各組合せとなる確率は同様に確からしいので、求める確率は

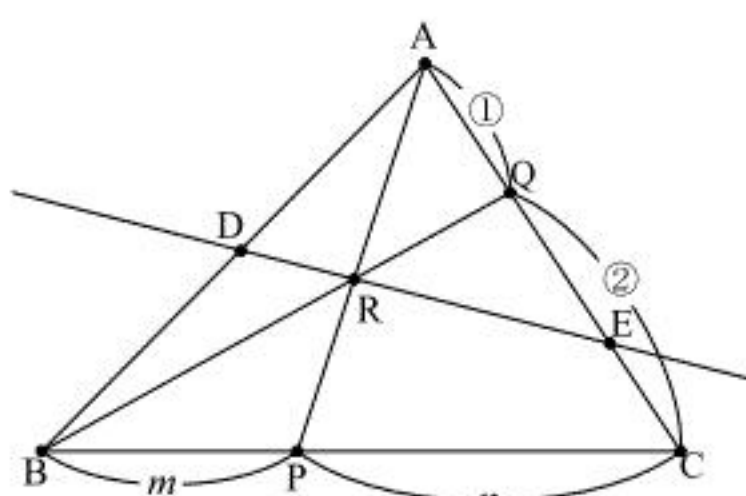
$$\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

となる。

(答) $\frac{2}{7}$

〔Ⅱ〕

(1)



点 R は線分 AP 上にあるため、実数 x ($0 \leq x \leq 1$) を用いて

$$\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{AP}$$

と表せる。一方、点 R は線分 BQ 上にあるため、実数 y ($0 \leq y \leq 1$) を用いて

$$\overrightarrow{AR} = (1-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AQ}$$

と表せる。したがって

$$x\overrightarrow{AP} = (1-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AQ}$$

である。ここで、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるので、

$$\begin{aligned} x\left(\frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c}\right) &= (1-y)\vec{b} + \frac{y}{3}\vec{c} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{nx}{m+n} - 1 + y\right)\vec{b} + \left(\frac{mx}{m+n} - \frac{y}{3}\right)\vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるので、

$$\begin{cases} \frac{nx}{m+n} - 1 + y = 0 \\ \frac{mx}{m+n} - \frac{y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+n}{3m+n} \\ y = \frac{3m}{3m+n} \end{cases}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= x\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AR} = \frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c}$$

(2)

実数 p ($0 \leq p \leq 1$)、 q ($0 \leq q \leq 1$) を用いて、 $\overrightarrow{AD} = p\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AE} = q\vec{c}$ と表す。点 E は直線 DR 上にあるため、実数 r を用いて

$$\overrightarrow{AE} = (1-r)\overrightarrow{AD} + r\overrightarrow{AR}$$

と表せる。(1)より

$$\overrightarrow{AR} = \frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= (1-r)\overrightarrow{AD} + r\overrightarrow{AR} \\ \Leftrightarrow q\vec{c} &= (1-r)p\vec{b} + r\left(\frac{n}{3m+n}\vec{b} + \frac{m}{3m+n}\vec{c}\right) \\ \Leftrightarrow \left\{(1-r)p + \frac{nr}{3m+n}\right\}\vec{b} + \left\{-q + \frac{mr}{3m+n}\right\}\vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるので、 p を用いて q, r を表すと

$$\begin{cases} (1-r)p + \frac{nr}{3m+n} = 0 \\ -q + \frac{mr}{3m+n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{mp}{(3m+n)p - n} \\ r = \frac{(3m+n)p}{(3m+n)p - n} \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} k &= \frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{(3m+n)p - n}{mp} \\ &= \frac{3m+n}{m} + \left(1 - \frac{n}{m}\right)\frac{1}{p} \end{aligned}$$

と変形できる。 k が点 D の線分 AB 上での位置によらず一定であることは、 p の値によらず k の値が一定であることであるので、

$$1 - \frac{n}{m} = 0 \Leftrightarrow m = n$$

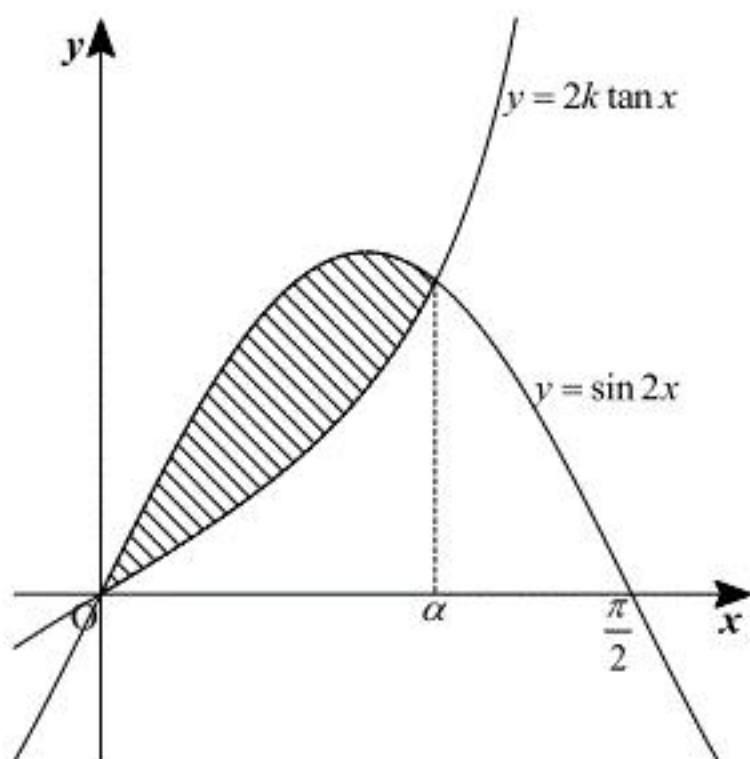
となるときである。またこのとき

$$k = \frac{3m+n}{m} = \frac{3m+m}{m} = 4$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = n, \quad k = 4$$

〔Ⅲ〕



まず、 $y = \sin 2x$ と $y = 2k \tan x$ との $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ での共有点を求める。2 式から y を消去すると

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2k \tan x \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2k \frac{\sin x}{\cos x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos^2 x - k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0, \cos^2 x &= k \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ では

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

である。また $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $0 < \cos x \leq 1$ であることと、 $0 < k < 1$ に注意すると

$$\cos^2 x = k \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{k}$$

と求まる。ここで、 $\cos x = \sqrt{k}$ を満たす角を α とする。ただし α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数

であるとする。ところで

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\log |\cos x| + C \end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数とする。求める面積 S は上図の斜線部であり、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha (\sin 2x - 2k \tan x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + 2k \log |\cos x| \right]_0^\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + 2k \log \cos \alpha + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) + 2k \log \cos \alpha + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (2k - 1) + 2k \log \sqrt{k} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (2k - 1) + k \log k + \frac{1}{2} \\ &= 1 - k + k \log k \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = 1 - k + k \log k$

〔Ⅳ〕

(1)

与えられた極方程式は、

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\cos\theta}{4-3\cos^2\theta} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4\cos\theta}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta} \\ \Leftrightarrow r(\cos^2\theta+4\sin^2\theta) &= 4\cos\theta \\ \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2 &= 4r\cos\theta \end{aligned}$$

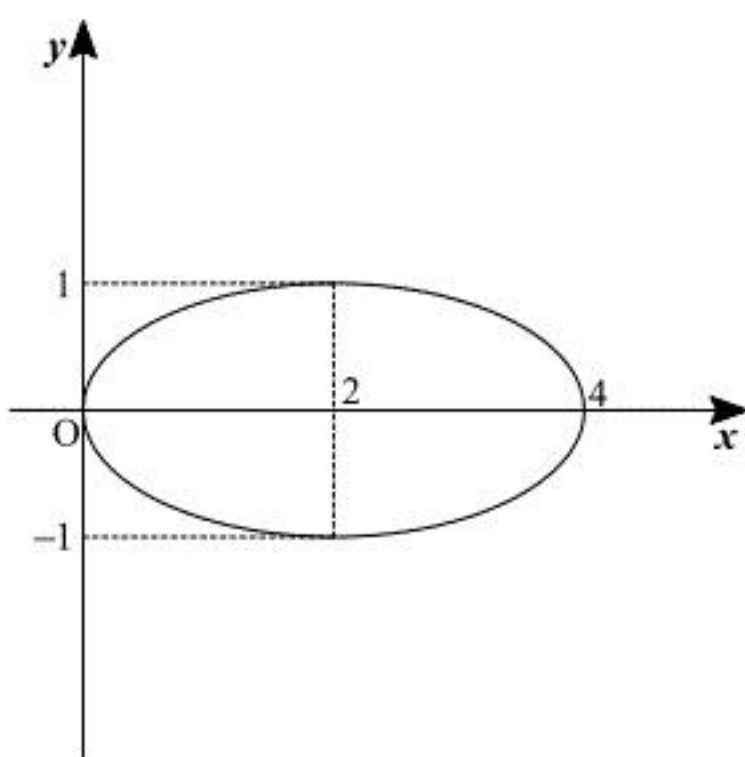
と変形できる。ここで、 $x=r\cos\theta$ 、 $y=r\sin\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} x^2+4y^2 &= 4x \\ \Leftrightarrow (x-2)^2+4y^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$

(2)



曲線 C は上図のような楕円となる。曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに一回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_0^4 \pi y^2 dx &= \pi \int_0^4 \left\{ 1 - \frac{(x-2)^2}{4} \right\} dx \\ &= \pi \left[x - \frac{(x-2)^3}{12} \right]_0^4 \\ &= 4\pi - \frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{8}{3}\pi$

(3)

曲線 C について、

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{4}+y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 4(1-y^2) \\ \Leftrightarrow x-2 &= \pm 2\sqrt{1-y^2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm 2\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

である。ただし $1-y^2 \geq 0$ に注意する。曲線 C の $x \geq 2$ の部分を $x_1 = 2 + 2\sqrt{1-y^2}$ 、曲線 C の

$x \leq 2$ の部分を $x_2 = 2 - 2\sqrt{1-y^2}$ と表すことにする。このとき、曲線 C で囲まれた部分を y 軸

の周りに一回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\pi x_1^2 - \pi x_2^2) dy &= \pi \int_{-1}^1 \left\{ (2+2\sqrt{1-y^2})^2 - (2-2\sqrt{1-y^2})^2 \right\} dy \\ &= 16\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = \sin a$ とおくと、

$$\frac{dy}{da} = \cos a$$

であり a と y は以下のような対応となる。

y	-1	$\rightarrow$	1
a	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

これより、求める体積は

$$\begin{aligned} 16\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 a} \cos a da \\ &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos a| \cos a da \\ &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a da \\ &= 16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2a}{2} da \\ &= 16\pi \left[\frac{1}{2}a + \frac{\sin 2a}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 16\pi \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 8\pi^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $8\pi^2$