

I 次の問いに答えよ。

(1) 等式

$$x^4 + x^2 - 4x - 3 = (x^2 + a)^2 - b(x + c)^2$$

が x についての恒等式であるように実数 a, b, c を定めよ。

(2) 方程式

$$x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0$$

の解を求めよ。

II

正の定数 a に対して、関数

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) すべての実数 x に対して $f(x) \geq a$ が成り立つことを示せ。
- (2) 曲線 $C: y = f(x)$ 上の 2 点 $P(0, a)$, $Q(b, f(b))$ ($b > 0$) 間の弧の長さは $af'(b)$ に等しいことを示せ。
- (3) 曲線 C と x 軸, y 軸, および直線 $x = b$ で囲まれた図形の面積を S とする。 S が $\frac{af(b)}{3}$ に等しいとき, S を a を用いて表せ。

III

正の整数 k に対して、連立不等式

$$y > \frac{k}{x}, \quad y \leq -\frac{x}{k} + 20, \quad x > 0$$

の表す領域を D とする。 x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点という。次の問いに答えよ。

- (1) k が 6 の倍数のとき, D に含まれる格子点のうち, x 座標が $\frac{k}{2}, \frac{k}{3}$ であるものの個数をそれぞれ求めよ。
- (2) 実数 x に対して, $n \leq x < n+1$ をみたす整数 n を $[x]$ と表す。 $k < 20$ とする。このとき, D に含まれる格子点のうち x 座標が整数 l ($1 \leq l \leq k$) であるものの個数を記号 $[\quad]$ を 1 度だけ用いて表せ。
- (3) $k = 4$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ。