

I

(1)

点と点の距離公式より、ABの長さは、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。またBCの長さは、

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(-9-0)^2 + (0-3)^2} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。またCAの長さは、

$$CA = 1 - (-9) = 10$$

となる。ここで三角形ABCについて余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{10 + 90 - 100}{2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\angle ABC = 90^\circ$ となる。したがって、三角形ABCの面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \\ &= 15 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos \angle ABC = 0$, 面積15

(2)

(1)より $\angle ABC = 90^\circ$ であるから、三角形ABCの辺CAは外接円の直径となり、中点は外接円の中心となる。したがって、外接円の半径は、

$$\frac{1}{2} \cdot CA = 5$$

となる。また、中心の座標は

$$\left(\frac{1-9}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (-4, 0)$$

となる。

(答) 半径5, 中心の座標 $(-4, 0)$

(3)

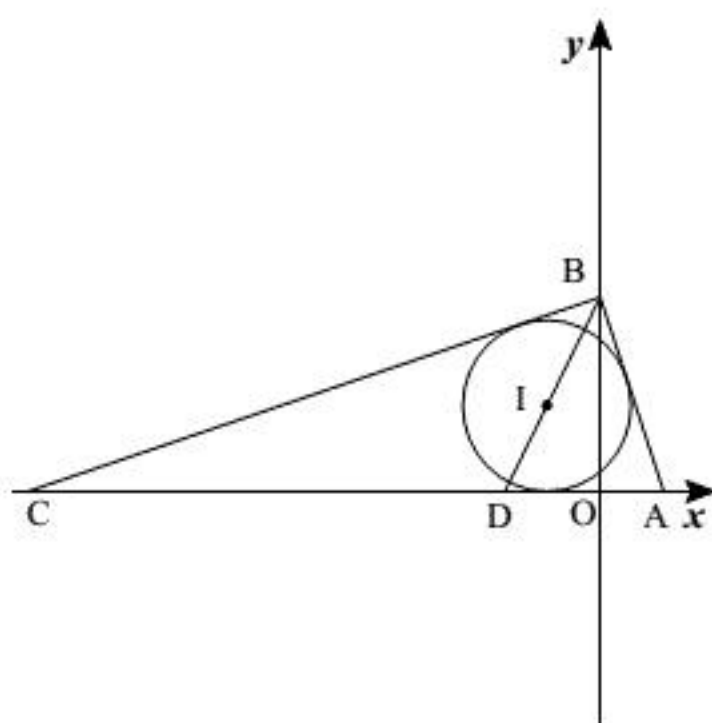
三角形ABCの内接円の半径を r とする。ここで、三角形ABCの面積を考えると、

$$S = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \cdot r$$

と書けるから、(1)の結果を代入すると、

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{1}{2}(\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 10)r \\ \Leftrightarrow r &= 2\sqrt{10} - 5 \end{aligned}$$

が得られる。以下の図のように、三角形ABCの内接円の中心をIとし、またBIの延長線上とCAの交点をDとする。



ここで内心の性質より、

$$\frac{DA}{CD} = \frac{BA}{BC}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{DA}{CD} &= \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、点Dの座標は、 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ となる。以上より、直線BIの方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{3-0}{0-\left(-\frac{3}{2}\right)}x + 3 \\ \therefore y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

である。ここで点IとCAの距離は、内接円の半径と同じであるから、点Iの y 座標は

$2\sqrt{10} - 5$ となる。したがって、Iの座標は、 $(\sqrt{10} - 4, 2\sqrt{10} - 5)$ となる。

(答) 半径 $2\sqrt{10} - 5$, 中心の座標 $(\sqrt{10} - 4, 2\sqrt{10} - 5)$

II

与えられた方程式を式変形すると、

$$\begin{aligned}
 y &= \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x \\
 &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \\
 &= \sqrt{3} \left(\sin 2x \cdot \frac{1}{2} - \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \\
 &= \sqrt{3} \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \\
 &= \sqrt{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ であるから、 $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{3}\pi$ となる。したがって、最大値は、

$$\begin{aligned}
 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{5}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi
 \end{aligned}$$

のときであり、このとき $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ となる。一方、最小値は、

$$\begin{aligned}
 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{11}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi
 \end{aligned}$$

のときであり、このとき $-\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値 } \sqrt{3} - \frac{1}{2} \left(x = \frac{5}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi \right)$$

$$\text{最小値 } -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \left(x = \frac{11}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi \right)$$

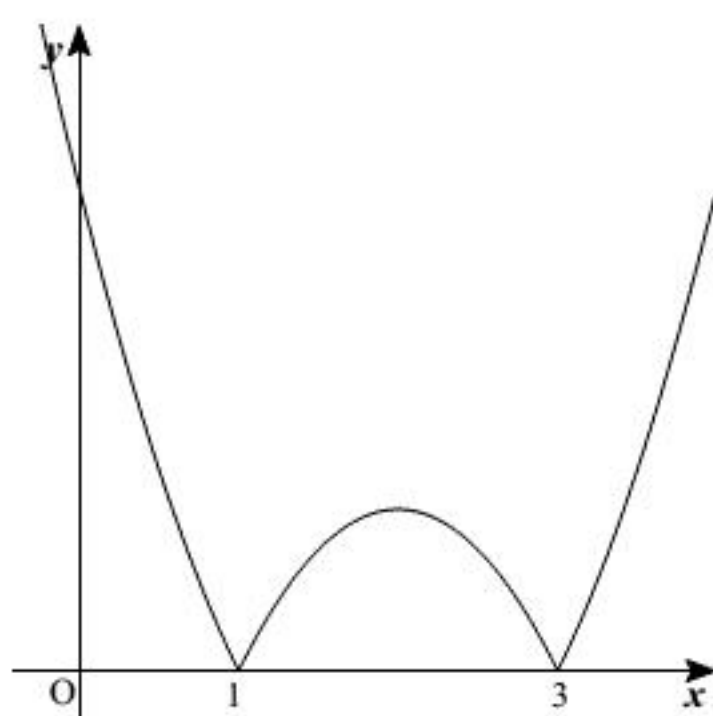
Ⅲ

(1)

与えられた式 $y = |x^2 - 4x + 3|$ を変形すると,

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - 4x + 3| \\ &= |(x-1)(x-3)| \end{aligned}$$

となるから, $y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフは以下のようになる。



[1] $a+2 < 1 \Leftrightarrow a < -1$ のとき

求める面積は,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+2} (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_a^{a+2} \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $-1 \leq a < 1$ のとき

求める面積は,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^{a+2} -(x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_a^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^{a+2} \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - 2a + 2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $1 \leq a < 3$ のとき

求める面積は,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^3 -(x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^{a+2} (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_a^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_3^{a+2} \\ &= \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + 2a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

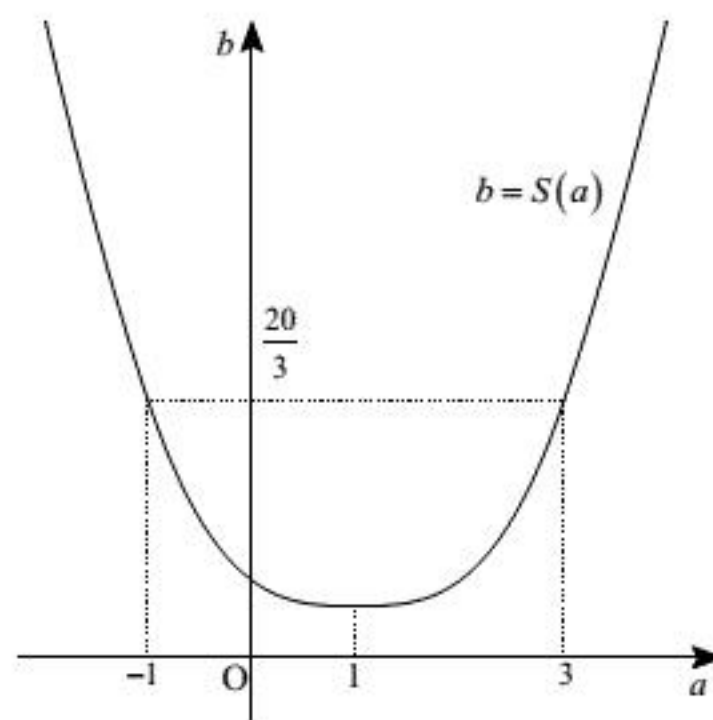
[4] $a > 3$ のとき

求める面積は,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+2} (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_a^{a+2} \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

[1], [2], [3], [4]より, グラフは以下の図のようになる。



(答) 上図

(2)

(1)の結果より, $S(a)$ の最小値は $a=1$ のときでその値は,

$$\begin{aligned} S(1) &= \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) 最小値 $\frac{4}{3}$ ($a=1$)