

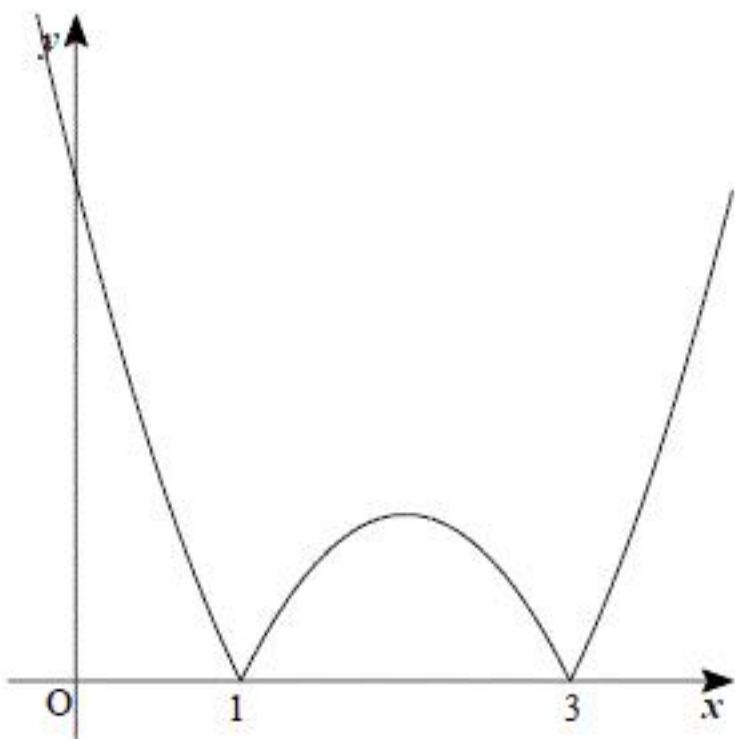
I

(1)

与えられた式 $y = |x^2 - 4x + 3|$ を変形すると、

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - 4x + 3| \\ &= |(x-1)(x-3)| \end{aligned}$$

となるから、 $y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフは以下のようになる。



[1] $a+2 < 1 \Leftrightarrow a < -1$ のとき

求める面積は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+2} (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_a^{a+2} \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $-1 \leq a < 1$ のとき

求める面積は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^{a+2} -(x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_a^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^{a+2} \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - 2a + 2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $1 \leq a < 3$ のとき

求める面積は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^3 -(x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^{a+2} (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_a^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_3^{a+2} \\ &= \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + 2a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

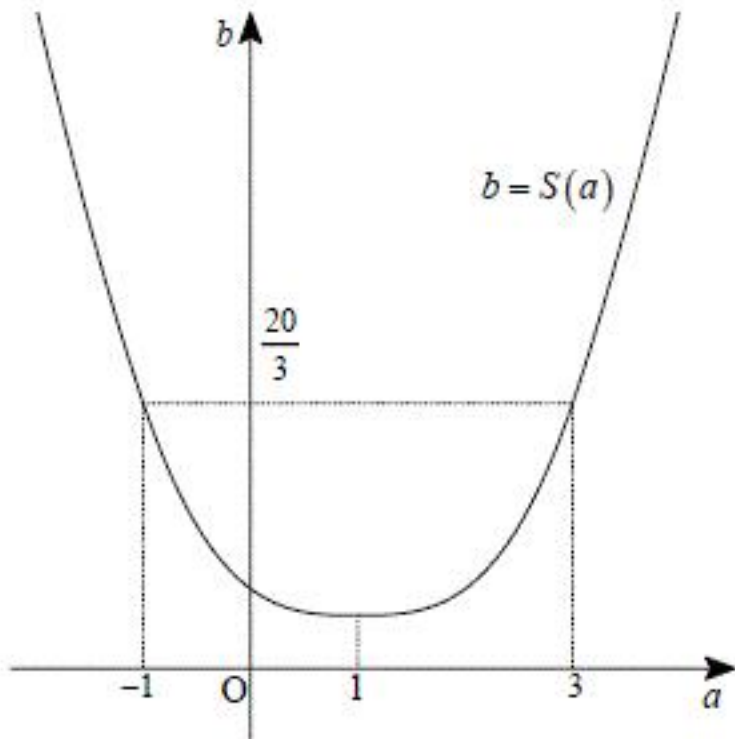
[4] $a > 3$ のとき

求める面積は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+2} (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_a^{a+2} \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

[1], [2], [3], [4]より、グラフは以下の図のようになる。



(答) 上図

(2)

(1)の結果より、 $S(a)$ の最小値は $a=1$ のときでその値は、

$$\begin{aligned} S(1) &= \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

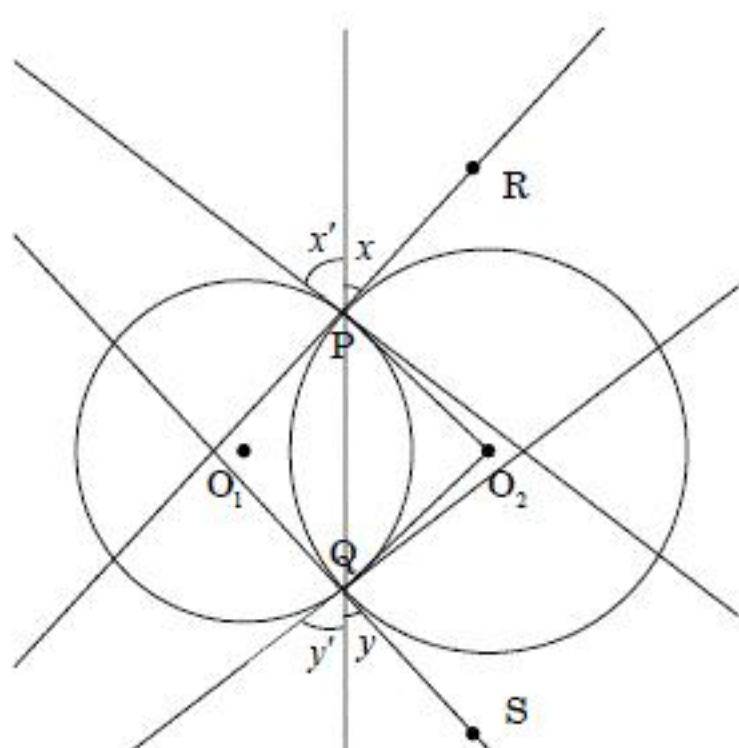
となる。

(答) 最小値 $\frac{4}{3}$ ($a=1$)

Ⅱ

(1)

下図のように、円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とおき、図のように点 R と点 S をおく。また、角度を x, x', y, y' とおく。



点 P における接線と直線 O_2P は直交するから、 $\angle O_2PR = 90^\circ$ となる。また同様にして、 $\angle O_2QS = 90^\circ$ となる。また円の半径であるから、 $O_2P = O_2Q$ となり、 $\triangle O_2PQ$ は二等辺三角形となる。したがって、

$$\angle O_2PQ = \angle O_2QP$$

となる。ここで、 x, y を考えると、

$$\begin{aligned} x &= 180^\circ - \angle O_2PR - \angle O_2PQ \\ &= 90^\circ - \angle O_2PQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 180^\circ - \angle O_2QS - \angle O_2QP \\ &= 90^\circ - \angle O_2QP \end{aligned}$$

であるから、

$$x = y$$

となる。同様にして

$$x' = y'$$

が言える。ここで $0^\circ < x + x' < 90^\circ$ のときは、

$$\alpha = x + x', \beta = y + y'$$

となるから、

$$\alpha = \beta$$

が得られる。また、 $90^\circ < x + x' < 180^\circ$ のときは、

$$\alpha = 180^\circ - (x + x'), \beta = 180^\circ - (y + y')$$

となるから、

$$\alpha = \beta$$

が得られる。以上より、一般に

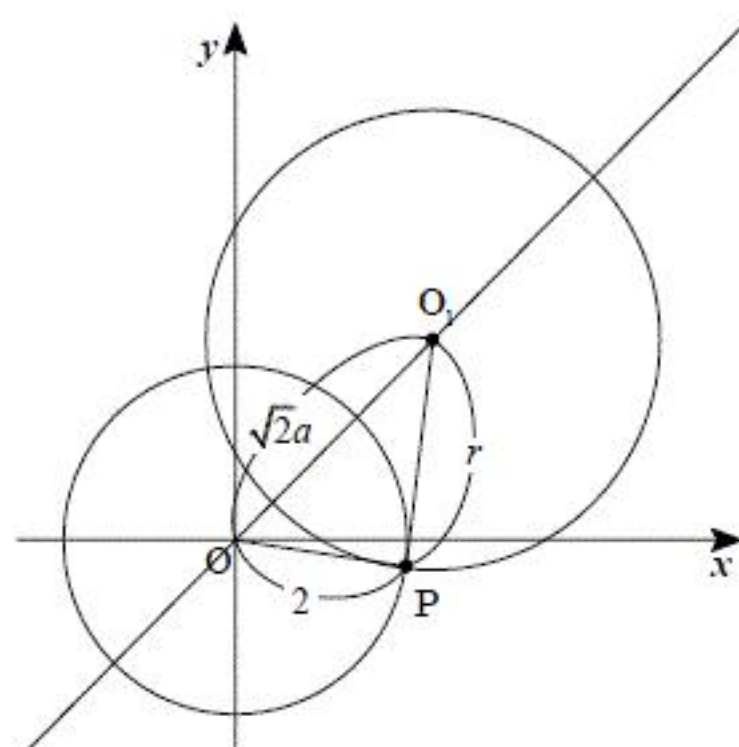
$$\alpha = \beta$$

となる。

(証明終)

(2)

円 C_1 の中心をそれぞれ O_1 とおく。円 C_1 は 2 点 $(1, 0), (0, 1)$ を通るから、 O_1 はこの 2 点からの距離が等しい点である。したがって、 O_1 は $y = x$ 上の点である。したがって、 O_1 の座標を (a, a) とおく。これを図示すると以下のようになる。



図のように 2 円の交点を P とする。このとき条件より、 $\triangle O_1OP$ は直角三角形となる。円 C_1 の半径を r とおけば、三平方の定理より、

$$r^2 + 2^2 = (\sqrt{2}a)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 r は点 $(1, 0)$ と点 (a, a) の距離でもあるので、

$$(a-1)^2 + a^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。①式と②式を連立して解くと、 $a = \frac{5}{2}, r = \frac{\sqrt{34}}{2}$ となる。したがって、円 C_1 の方程式は、

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

Ⅲ

(1)

定数 A を用いて、 $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt$ とおく。したがって、 $f(x) = \cos x + \frac{8}{7}A$ となる。ここで、 A を計算すると、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos t + \frac{8}{7}A \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{8}{7}A \sin t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{8}{7}A \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{4}{7}A \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8} + \frac{4}{7}A \\ \Leftrightarrow A &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$f(x) = \cos x + 1$$

となる。

(答) $f(x) = \cos x + 1$

(2)

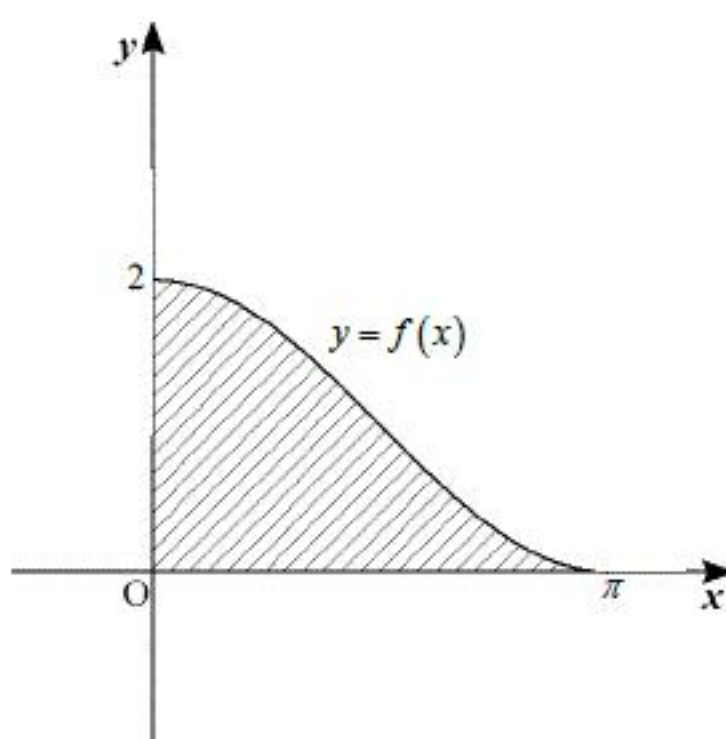
C_1, C_2, C を積分定数として、不定積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \int x^2 (-\cos x)' dx \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx + C_1 \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x (\sin x)' dx + C_1 \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx + C_2 \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

(3)



$y = f(x)$ と x 軸、および y 軸で囲まれた図形を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積を考えると、

$$y = \cos x + 1$$

より、これを x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

となる。したがって、体積を計算すると、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^2 x^2 dy &= \pi \int_{\pi}^0 x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= \pi \int_{\pi}^0 x^2 (-\sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \end{aligned}$$

となる。(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx &= \pi \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi (\pi^2 - 2 - 2) \\ &= \pi^3 - 4\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi^3 - 4\pi$