

I

(1)

定数 A を用いて、 $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt$ とおく。したがって、 $f(x) = \cos x + \frac{8}{7}A$ となる。ここで、 A を計算すると、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos t + \frac{8}{7}A \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{8}{7}A \sin t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{8}{7}A \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{4}{7}A \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8} + \frac{4}{7}A \\ \Leftrightarrow A &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$f(x) = \cos x + 1$$

となる。

(答) $f(x) = \cos x + 1$

(2)

C_1, C_2, C を積分定数として、不定積分を計算すると、

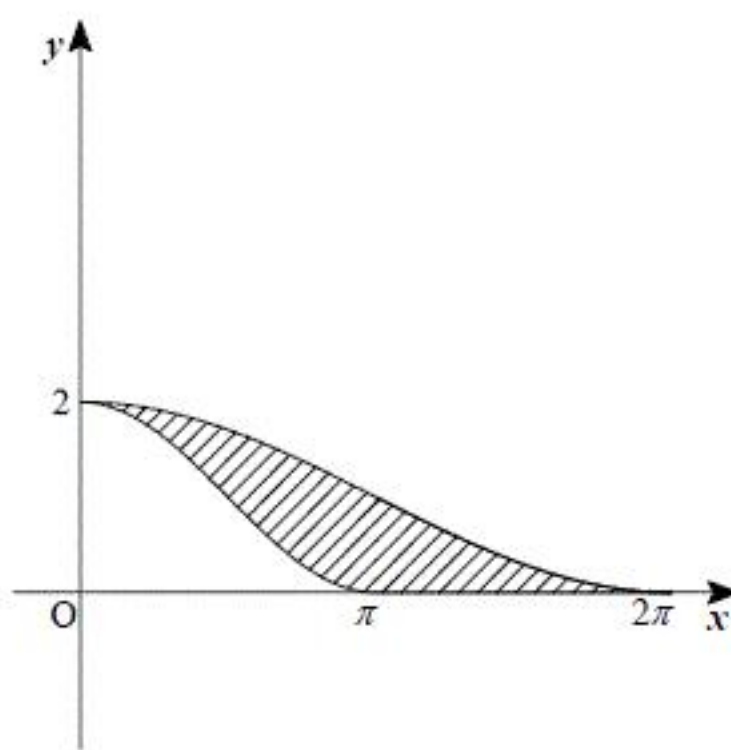
$$\begin{aligned} \int x^2 \sin \alpha x dx &= \int x^2 \left(-\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \right)' dx \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int 2x \cos \alpha x dx + C_1 \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int 2x \left(\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \right)' dx + C_1 \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha^2} x \sin \alpha x - \frac{2}{\alpha^2} \int \sin \alpha x dx + C_2 \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha^2} x \sin \alpha x + \frac{2}{\alpha^3} \cos \alpha x + C \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int x^2 \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha^2} x \sin \alpha x + \frac{2}{\alpha^3} \cos \alpha x + C$$

(3)

(1) より $f(x) = \cos x + 1$ であるから、図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(4)

求める体積は、 $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積から $y = f(x)$ を y

軸まわりに1回転してできる回転体の体積を引いたものである。まず、 $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ を y 軸まわ

りに1回転してできる回転体の体積 V_1 を考えると、

$$\begin{aligned} y &= f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

であるから、これを x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$$

となる。また、

$$\begin{array}{c|cc} y & 0 & \rightarrow & 2 \\ x & 2\pi & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となるため、 V_1 を計算すると、

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{2\pi} x^2 dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^0 x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= \pi \int_{2\pi}^0 x^2 \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

となる。(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-2x^2 \cos \frac{x}{2} + 8x \sin \frac{x}{2} + 16 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} (8\pi^2 - 16 - 16) \\ &= 4\pi^3 - 16\pi \end{aligned}$$

が得られる。次に、 $y = f(x)$ を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積 V_2 を考えると、

$$y = \cos x + 1$$

より、これを x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

となる。また、

$$\begin{array}{c|cc} y & 0 & \rightarrow & 2 \\ x & \pi & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となるため、 V_2 を計算すると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\pi} x^2 dy \\ &= \pi \int_{\pi}^0 x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= \pi \int_{\pi}^0 x^2 (-\sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \end{aligned}$$

となる。(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \\ &= \pi \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi (\pi^2 - 2 - 2) \\ &= \pi^3 - 4\pi \end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 \\ &= 3\pi^3 - 12\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $3\pi^3 - 12\pi$

II

(1)

区間 $[a, b]$ 上で $|f''(x)| \leq M$ であるから,

$$-M \leq f''(x) \leq M$$

が成立する。ここで, $c \in [a, b]$ であり, $x \in [a, b]$ としているから,

$$\int_c^x (-M) dx \leq \int_c^x f''(x) dx \leq \int_c^x M dx$$

が成立する。この不等式を計算すると,

$$\int_c^x (-M) dx \leq \int_c^x f''(x) dx \leq \int_c^x M dx$$

$$\Leftrightarrow -M(x-c) \leq f'(x) - f'(c) \leq M(x-c)$$

が得られる。この不等式から, 同様にして,

$$\int_c^x -M(x-c) dx \leq \int_c^x \{f'(x) - f'(c)\} dx \leq \int_c^x M(x-c) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{M}{2}(x-c)^2 \leq f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \leq \frac{M}{2}(x-c)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow f(c) + f'(c)(x-c) - \frac{M}{2}(x-c)^2 \leq f(x) \leq f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{M}{2}(x-c)^2$$

が得られる。以上より, 題意の不等式が示された。

(証明終)

(2)

(1)の①式は, 任意の $x \in [a, b]$ で成立するから,

$$\int_a^b -\frac{M}{2}(x-c)^2 dx \leq \int_a^b \{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)\} dx \leq \int_a^b \frac{M}{2}(x-c)^2 dx \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。ここで, $c = \frac{a+b}{2}$ としているから, $\int_a^b (x-c)^2 dx$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-c)^2 dx &= \left[\frac{1}{3}(x-c)^3 \right]_a^b \\ &= \frac{(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

となる。また, $\int_a^b \{f(c) + f'(c)(x-c)\} dx$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(c) + f'(c)(x-c)\} dx &= \left[f(c)x + \frac{f'(c)}{2}(x-c)^2 \right]_a^b \\ &= f(c)(b-a) \end{aligned}$$

となる。したがって, ②式は,

$$-\frac{M}{24}(b-a)^3 \leq \int_a^b f(x) dx - f(c)(b-a) \leq \frac{M}{24}(b-a)^3$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - f(c)(b-a) \right| \leq \frac{M}{24}(b-a)^3$$

が得られる。以上より, 題意の不等式が示された。

(証明終)

(3)

(2)で示した式において, $b \rightarrow a + \frac{k}{n}(b-a)$, $a \rightarrow a + \frac{k-1}{n}(b-a)$ とすると,

$$\left| \int_{a+\frac{k-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{k}{n}(b-a)} f(x) dx - f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{M}{24n^3}(b-a)^3$$

が得られる。これを $k=1, 2, \dots, n$ と足し合わせ, 三角不等式 $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ を用いると,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{M}{24n^2}(b-a)^3$$

が得られる。

(証明終)

Ⅲ

(1)

1回の試行でカードが取り出される確率は、それぞれ a が $\frac{1}{5}$, b が $\frac{3}{5}$, c が $\frac{1}{5}$ である。

p_1 となるのは、1回目に b のカードを取り出せばよいから、

$$p_1 = \frac{3}{5}$$

である。 q_1 となるのは、1回目に a のカードを取り出せばよいから、

$$q_1 = \frac{1}{5}$$

である。 r_1 となるのは、1回目に c のカードを取り出せばよいから、

$$r_1 = \frac{3}{5}$$

である。1回の試行ではカードを1枚しか取り出せないから、

$$s_1 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{3}{5}, q_1 = \frac{1}{5}, r_1 = \frac{3}{5}, s_1 = 0$$

(2)

a と書かれたカードと、 c と書かれたカードの枚数は等しいから、 q_n と r_n は対称である。したがって、

$$r_n = q_n$$

である。また、 $p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから、

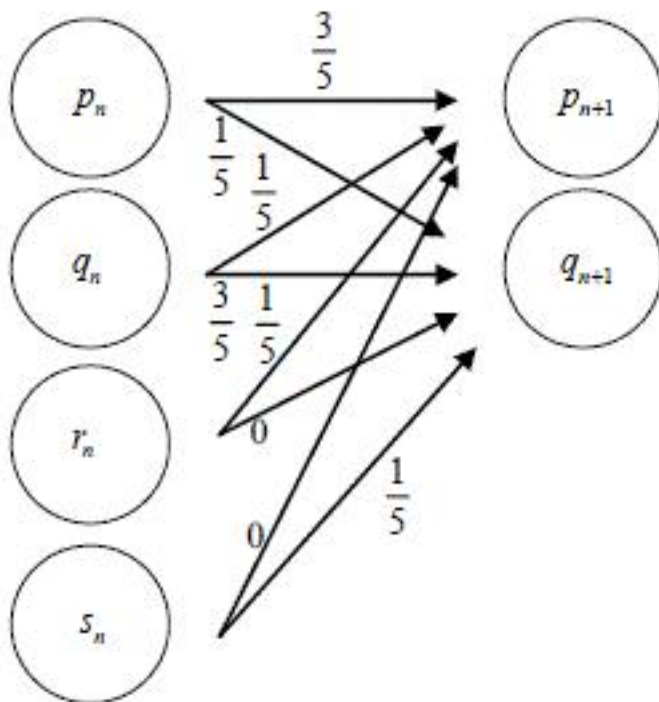
$$\begin{aligned} p_n + q_n + r_n + s_n &= 1 \\ \Leftrightarrow s_n &= 1 - p_n - 2q_n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_n = q_n, s_n = 1 - p_n - 2q_n$$

(3)

確率遷移図を書くと以下ようになる。



上図より、

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}q_n + \frac{1}{5}s_n \end{cases}$$

が得られる。これに(2)の結果を代入すると、

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n, q_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$$

(4)

(3)の結果より、 $q_{n+1} = \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}$ を考える。この漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow q_{n+1} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{5}\left(q_n - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって、(1)の結果より $q_1 = \frac{1}{5}$ であるから

$$\begin{aligned} q_n &= \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。この極限を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\}, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{4}$$