

I

(1)

定数 A を用いて、 $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt$ とおく。したがって、 $f(x) = \cos x + \frac{8}{7}A$ となる。ここで、 A を計算すると、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos t + \frac{8}{7}A \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{8}{7}A \sin t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{8}{7}A \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{4}{7}A \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8} + \frac{4}{7}A \\ \Leftrightarrow A &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$f(x) = \cos x + 1$$

となる。

(答) $f(x) = \cos x + 1$

(2)

C_1, C_2, C を積分定数として、不定積分を計算すると、

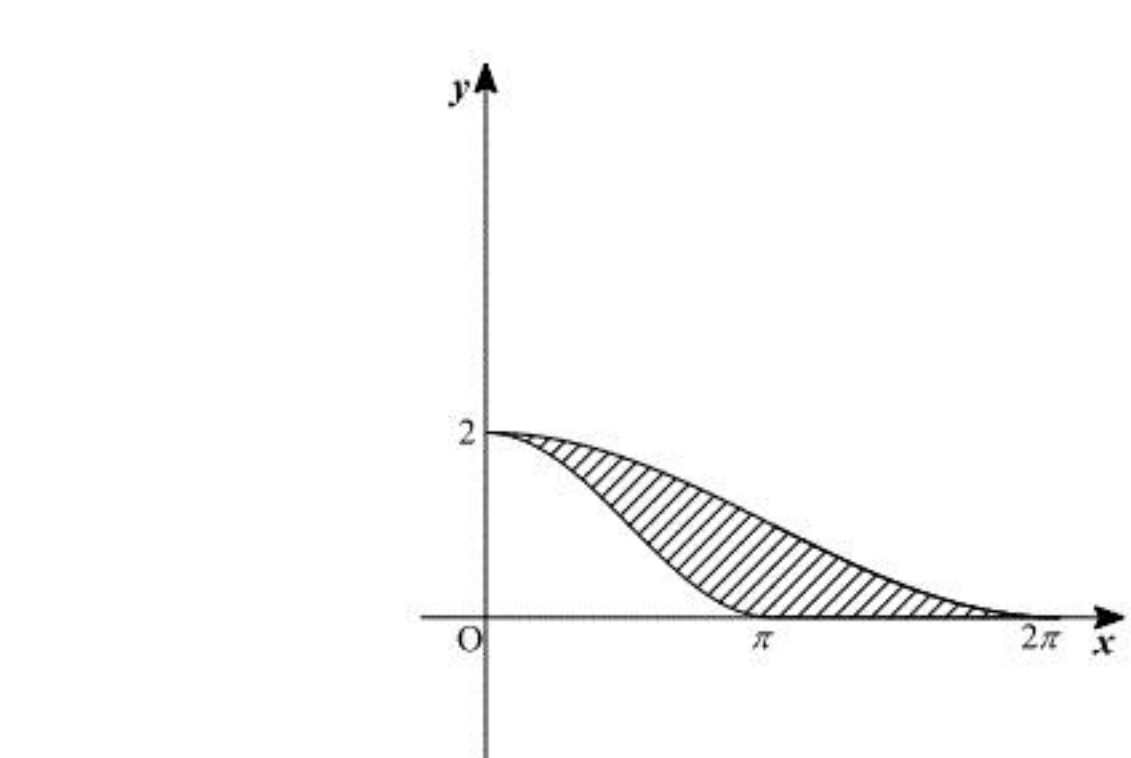
$$\begin{aligned} \int x^2 \sin \alpha x dx &= \int x^2 \left(-\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \right)' dx \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int 2x \cos \alpha x dx + C_1 \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int 2x \left(\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \right)' dx + C_1 \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha^2} x \sin \alpha x - \frac{2}{\alpha^2} \int \sin \alpha x dx + C_2 \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha^2} x \sin \alpha x + \frac{2}{\alpha^3} \cos \alpha x + C \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \int x^2 \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} x^2 \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha^2} x \sin \alpha x + \frac{2}{\alpha^3} \cos \alpha x + C$$

(3)

(1) より $f(x) = \cos x + 1$ であるから、図示すると以下ようになる。



(答) 前図

(4)

求める体積は、 $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積から $y = f(x)$ を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積を引いたものである。まず、 $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積 V_1 を考えると、

$$\begin{aligned} y &= f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

であるから、これを x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$$

となる。また、

y	0	$\rightarrow$	2
x	2π	$\rightarrow$	0

となるため、 V_1 を計算すると、

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^2 x^2 dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^0 x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= \pi \int_{2\pi}^0 x^2 \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

となる。(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-2x^2 \cos \frac{x}{2} + 8x \sin \frac{x}{2} + 16 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} (8\pi^2 - 16 - 16) \\ &= 4\pi^3 - 16\pi \end{aligned}$$

が得られる。次に、 $y = f(x)$ を y 軸まわりに1回転してできる回転体の体積 V_2 を考えると、

$$y = \cos x + 1$$

より、これを x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

となる。また、

y	0	$\rightarrow$	2
x	π	$\rightarrow$	0

となるため、 V_2 を計算すると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^2 x^2 dy \\ &= \pi \int_{\pi}^0 x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= \pi \int_{\pi}^0 x^2 (-\sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \end{aligned}$$

となる。(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \\ &= \pi \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi (\pi^2 - 2 - 2) \\ &= \pi^3 - 4\pi \end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 \\ &= 3\pi^3 - 12\pi \end{aligned}$$

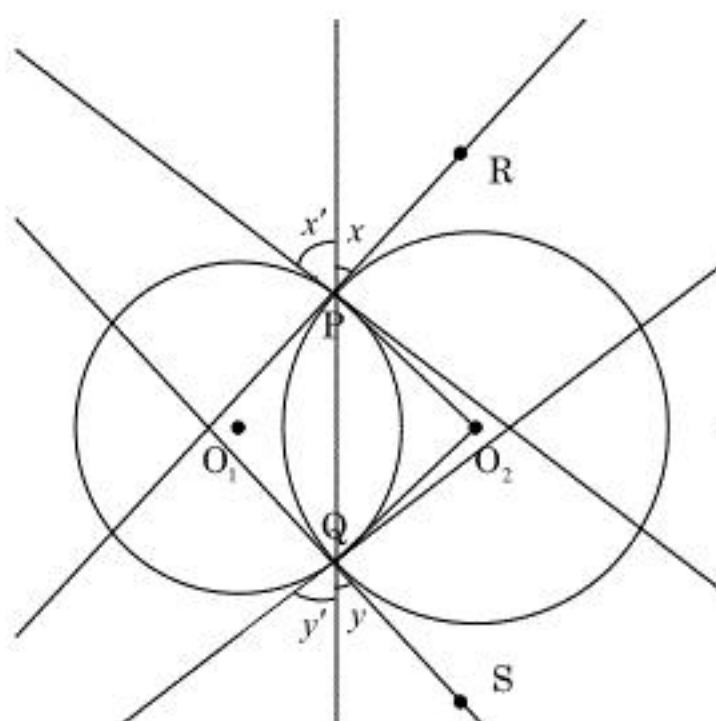
となる。

(答) $3\pi^3 - 12\pi$

II

(1)

下図のように、円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とおき、図のように点 R と点 S をおく。また、角度を x, x', y, y' とおく。



点 P における接線と直線 O_2P は直交するから、 $\angle O_2PR = 90^\circ$ となる。また同様にして、 $\angle O_2QS = 90^\circ$ となる。また円の半径であるから、 $O_2P = O_2Q$ となり、 $\triangle O_2PQ$ は二等辺三角形となる。したがって、

$$\angle O_2PQ = \angle O_2QP$$

となる。ここで、 x, y を考えると、

$$\begin{aligned} x &= 180^\circ - \angle O_2PR - \angle O_2PQ \\ &= 90^\circ - \angle O_2PQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 180^\circ - \angle O_2QS - \angle O_2QP \\ &= 90^\circ - \angle O_2PQ \end{aligned}$$

であるから、

$$x = y$$

となる。同様にして

$$x' = y'$$

が言える。ここで $0^\circ < x + x' < 90^\circ$ のときは、

$$\alpha = x + x', \beta = y + y'$$

となるから、

$$\alpha = \beta$$

が得られる。また、 $90^\circ < x + x' < 180^\circ$ のときは、

$$\alpha = 180^\circ - (x + x'), \beta = 180^\circ - (y + y')$$

となるから、

$$\alpha = \beta$$

が得られる。以上より、一般に

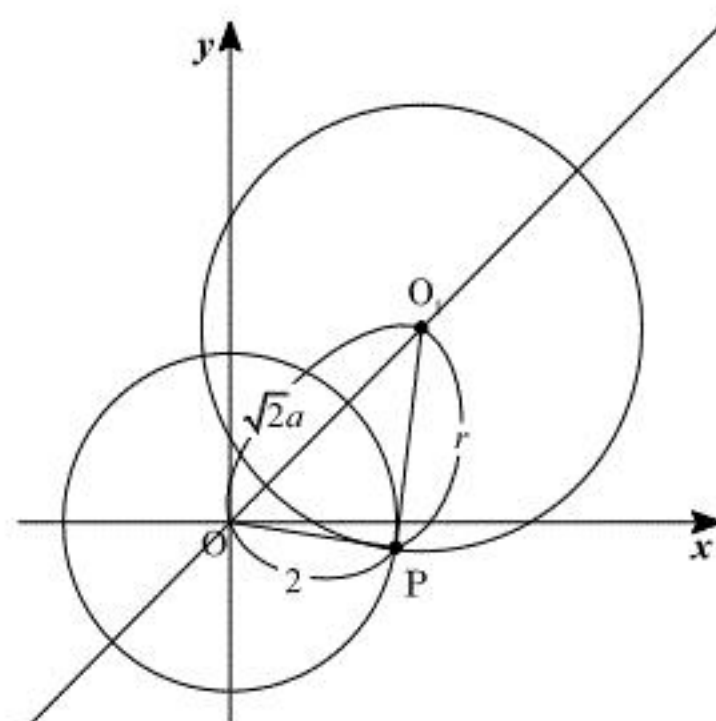
$$\alpha = \beta$$

となる。

(証明終)

(2)

円 C_1 の中心を O_1 とおく。円 C_1 は 2 点 $(1, 0), (0, 1)$ を通るから、 O_1 はこの 2 点からの距離が等しい点である。したがって、 O_1 は $y = x$ 上の点である。したがって、 O_1 の座標を (a, a) とおく。これを図示すると以下になる。



図のように 2 円の交点を P とする。このとき条件より、 $\triangle O_1OP$ は直角三角形となる。円 C_1 の半径を r とおけば、三平方の定理より、

$$r^2 + 2^2 = (\sqrt{2}a)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 r は点 $(1, 0)$ と点 (a, a) の距離でもあるから、

$$(a-1)^2 + a^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。①式と②式を連立して解くと、 $a = \frac{5}{2}, r = \frac{\sqrt{34}}{2}$ となる。したがって、円 C_1 の方程式は、

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

III

(1)

区間 $[a, b]$ 上で $|f''(x)| \leq M$ であるから,

$$-M \leq f''(x) \leq M$$

が成立する。ここで, $c \in [a, b]$ であり, $x \in [a, b]$ としているから,

$$\int_c^x (-M) dx \leq \int_c^x f''(x) dx \leq \int_c^x M dx$$

が成立する。この不等式を計算すると,

$$\int_c^x (-M) dx \leq \int_c^x f''(x) dx \leq \int_c^x M dx$$

$$\Leftrightarrow -M(x-c) \leq f'(x) - f'(c) \leq M(x-c)$$

が得られる。この不等式から, 同様にして,

$$\int_c^x -M(x-c) dx \leq \int_c^x \{f'(x) - f'(c)\} dx \leq \int_c^x M(x-c) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{M}{2}(x-c)^2 \leq f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \leq \frac{M}{2}(x-c)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow f(c) + f'(c)(x-c) - \frac{M}{2}(x-c)^2 \leq f(x) \leq f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{M}{2}(x-c)^2$$

が得られる。以上より, 題意の不等式が示された。

(証明終)

(2)

(1)の①式は, 任意の $x \in [a, b]$ で成立するから,

$$\int_a^b -\frac{M}{2}(x-c)^2 dx \leq \int_a^b \{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)\} dx \leq \int_a^b \frac{M}{2}(x-c)^2 dx \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。ここで, $c = \frac{a+b}{2}$ としているから, $\int_a^b (x-c)^2 dx$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-c)^2 dx &= \left[\frac{1}{3}(x-c)^3 \right]_a^b \\ &= \frac{(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

となる。また, $\int_a^b \{f(c) + f'(c)(x-c)\} dx$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(c) + f'(c)(x-c)\} dx &= \left[f(c)x + \frac{f'(c)}{2}(x-c)^2 \right]_a^b \\ &= f(c)(b-a) \end{aligned}$$

となる。したがって, ②式は,

$$-\frac{M}{24}(b-a)^3 \leq \int_a^b f(x) dx - f(c)(b-a) \leq \frac{M}{24}(b-a)^3$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - f(c)(b-a) \right| \leq \frac{M}{24}(b-a)^3$$

が得られる。以上より, 題意の不等式が示された。

(証明終)

(3)

(2)で示した式において, $b \rightarrow a + \frac{k}{n}(b-a), a \rightarrow a + \frac{k-1}{n}(b-a)$ とすると,

$$\left| \int_{a+\frac{k-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{k}{n}(b-a)} f(x) dx - f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{M}{24n^3}(b-a)^3$$

が得られる。これを $k=1, 2, \dots, n$ と足し合わせ, 三角不等式 $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ を用いると,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{M}{24n^2}(b-a)^3$$

が得られる。

(証明終)