

理学部数学科試験問題

数 学

注 意

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は1ページから3ページにわたっています。問題冊子が不備な場合は、直ちにその旨を監督者に申し出て下さい。
3. 解答用紙は3枚で、問題冊子とは別になっています。各解答用紙には志望学部を書く欄が1か所と受験番号を書く欄が2か所あります。もれなく記入して下さい。
4. 解答は指定された解答用紙に記入して下さい。その際、解答用紙の番号を間違えないようにして下さい。
5. 解答用紙の裏面には解答を書かないで下さい。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子、計算用紙は持ち帰って下さい。

I 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \cos x + \frac{8}{7} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t \, dt$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) α を 0 でない定数とするとき、不定積分 $\int x^2 \sin \alpha x \, dx$ を求めよ。
- (3) 2 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) と $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)、および x 軸で囲まれた図形を図示せよ。
- (4) (3) の図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(解答用紙は、**I** を使用せよ)

数 I

Ⅱ 関数 $f(x)$ が連続な第2次導関数 $f''(x)$ をもち、正の定数 M に対して、区間 $[a, b]$ 上で常に $|f''(x)| \leq M$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $c \in [a, b]$ とする。このとき、任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$f(c) + f'(c)(x - c) - \frac{M}{2}(x - c)^2 \leq f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{M}{2}(x - c)^2$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1) において、 c が $[a, b]$ の中点であるとき

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f(c)(b - a) \right| \leq \frac{M}{24}(b - a)^3$$

が成り立つことを示せ。

(3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{M}{24n^2}(b-a)^3$$

が成り立つことを示せ。

(解答用紙は、 **Ⅱ** を使用せよ)

数 Ⅱ

Ⅲ 箱の中に a と書かれたカードが 1 枚, b と書かれたカードが 3 枚, c と書かれたカードが 1 枚の合計 5 枚のカードが入っている。また, 机の上には 3 枚の板 A, B, C があり, それぞれの板の一つの面は白色, 他の面は黒色に塗られている。最初, 3 枚の板を白色が表になるように置き, 次のような試行を行う。

試行: 箱の中から 1 枚のカードを取り出し, そのカードに書かれた文字が a のときは板 A を, b のときは板 B を, c のときは板 C を裏返し, 取り出したカードをもとにもどす。

n 回の試行の後,

板 A と板 C がともに白色である確率を p_n ,

板 A が黒色で板 C が白色である確率を q_n ,

板 A が白色で板 C が黒色である確率を r_n ,

板 A と板 C がともに黒色である確率を s_n

とする。次の問いに答えよ。

- (1) p_1, q_1, r_1, s_1 を求めよ。
- (2) a と書かれたカードと c と書かれたカードが同じ枚数であることに注意して, r_n, s_n を p_n, q_n を用いて表せ。
- (3) $p_{n+1}, q_{n+1}, p_n, q_n$ の満たす関係を求めよ。
- (4) q_n を n を用いて表し, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

(解答用紙は, **Ⅲ** を使用せよ)

数 Ⅲ