I

(1)

点Cの座標を(X, Y)とおく。線分ACの中点は直線ℓ上にあるので,

$$\frac{Y+4}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{X+1}{2}+1$$

$$\Leftrightarrow X-2Y=3 \qquad \cdots ①$$

が成り立つ。直線ℓの方向ベクトルの1つを$\vec{\ell}=(2, 1)$とすると,

$$\mathrm{AC}\perp\ell$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{\ell}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(X-1)+Y-4=0$$

$$\Leftrightarrow 2X+Y=6 \qquad \cdots ②$$

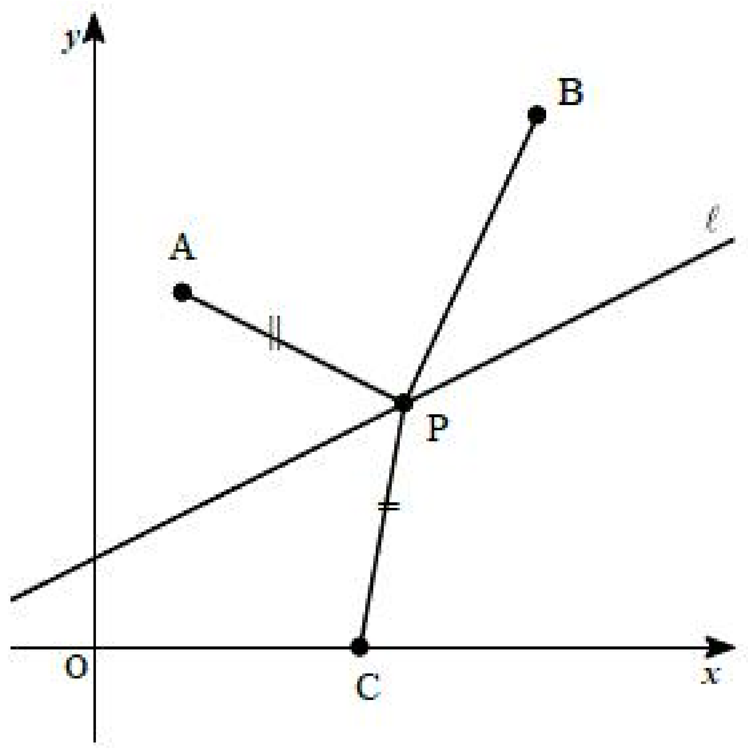
が成り立つ。①, ②を連立して,

$$(X, Y)=(3, 0)$$

と求まる。

(答) C$(3, 0)$

(2)



AとCは直線ℓに関して対称な点なので,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{CP}$$

である。よって,

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{CP}+\mathrm{PB}\geqq\mathrm{BC}$$

となるので, AP+PBが最小となるのは, 点Pが直線BC上にあるときである。直線BCの方程式は,

$$y=\frac{6-0}{5-3}(x-3)$$

$$=3x-9$$

であるから, 直線ℓと直線BCの交点は,

$$\frac{1}{2}x+1=3x-9$$

$$\therefore x=4$$

と求まる。このとき,

$$y=3\cdot4-9$$

$$=3$$

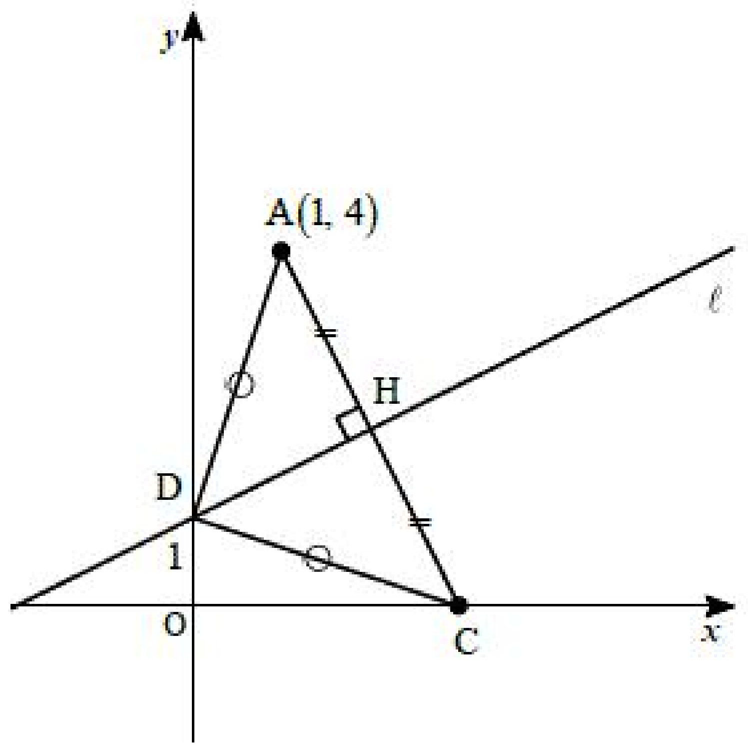
である。よって, 求める座標は,

$$(4, 3)$$

である。

(答) $(4, 3)$

[(1)の別解]



上図のように, 直線ℓとy軸との交点をD, 点Aから直線ℓにおろした垂線の足をHとおくと, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$は$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$の正射影ベクトルであるから, 直線$\ell$の方向ベクトルの1つを$\vec{\ell}=(2, 1)$として,

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\frac{\vec{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}}{\left|\vec{\ell}\right|^2}\vec{\ell}$$

$$=\frac{(2, 1)\cdot(1, 3)}{2^2+1^2}\vec{\ell}$$

$$=\vec{\ell}$$

$$=(2, 1)$$

と求まる。したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

$$=(2, 1)-(1, 3)$$

$$=(1, -2)$$

であるから, 対称性より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

$$=(1, 4)+2(1, -2)$$

$$=(3, 0)$$

と求まる。

(答) C$(3, 0)$

II

(1)

$$6\int_0^x f(t)\,dt = 6\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+ct\right]_0^x$$
$$=2ax^3+3bx^2+6cx \qquad ・・・①$$

であり,

$$f(x)f'(x)-12x+k=(ax^2+bx+c)(2ax+b)-12x+k$$

$$=2a^2x^3+3abx^2+(b^2+2ac-12)x+bc+k \qquad ・・・②$$

である。①と②がすべての実数xに対して等しいので，係数比較すると,

$$\begin{cases}2a=2a^2\\3b=3ab\\6c=b^2+2ac-12\\0=bc+k\end{cases} \qquad ・・・③$$

が成り立つ。$y=f(x)$が2次関数であるので，$a\neq 0$であり，③の第1式より

$a(a-1)=0$

$\therefore a=1$

と求まる。

(答) $a=1$

(2)

(1)の答えと③の第3式より,

$$c=\frac{1}{4}b^2-3$$

と求まる。

(答) $c=\frac{1}{4}b^2-3$

(3)

$f'(x)=2x+b$より,

$f'(0)=b$

なので

$0\leqq b\leqq 4$

である。③の第4式と(2)の答えより,

$$k=-bc$$
$$=-\frac{1}{4}b^3+3b$$

となる。

$$g(b)=-\frac{1}{4}b^3+3b$$

とおくと,

$$g'(b)=-\frac{3}{4}b^2+3$$
$$=-\frac{3}{4}(b+2)(b-2)$$

であるから，$0\leqq b\leqq 4$における$g(b)$の増減表は下図の通りである。

b	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$g'(b)$		+	0	−	
$g(b)$	0	↗	4	↘	−4

したがって，$k=g(b)$は,

$b=2$のとき，最大値 4

$b=4$のとき，最小値 -4

をとる。

(答) 最大値:4 ($b=2$のとき)，最小値:-4 ($b=4$のとき)

III

(1)

nは自然数であるから，

$$f(n)=\sqrt{n^2+112}$$
$$>0$$

である。まず，$f(n)<n+10$を示す。

$$\begin{aligned}(n+10)^2-\{f(n)\}^2&=n^2+20n+100-(n^2+112)\\&=20n-12\\&\geqq 20-12\\&=8\end{aligned}$$

であるから，

$$(n+10)^2>\{f(n)\}^2$$

となる。$n+10$, $f(n)$ともに正であるから，

$$f(n)<n+10$$

が成り立つ。次に$n<f(n)$を示す。

$$\begin{aligned}f(n)-n&=\sqrt{n^2+112}-n\\&>\sqrt{n^2}-n\\&=0\end{aligned}$$

であるから，

$$n<f(n)$$

が成り立つ。以上より，自然数nに対して，

$$n<f(n)<n+10$$

が示された。

(証明終)

(2)

lを自然数として，

$$f(n)=n+l \quad \cdots ①$$

となるとき，(1)より，

$$l=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$$

である。①より，

$$\sqrt{n^2+112}=n+l$$

$$\Leftrightarrow n^2+112=n^2+2nl+l^2 \quad (\because \text{両辺正より})$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{112-l^2}{2l} \quad (\because l\neq 0) \quad \cdots ②$$

と表せる。②式の分母が偶数なので，分子も偶数でなければならないことに気をつければ，

$$l=2,\ 4,\ 6,\ 8$$

のいずれかである。

[1] $l=2$のとき，

$$n=27$$

となる。

[2] $l=4$のとき，

$$n=12$$

となる。

[3] $l=6$のとき，

$$n=\frac{14}{3}$$

となり，不適である。

[4] $l=8$のとき，

$$n=3$$

となる。

[1]～[4]より，$f(n)$が整数となるnは，

$$n=3,\ 12,\ 27$$

である。

(答) $n=3,\ 12,\ 27$