$\boxed{\text{I}}$

真数条件より,

$$\frac{2-x^2-y^2}{x+y}>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2<2 \text{　かつ　} x+y>0 \\ \qquad\qquad\text{または} \\ x^2+y^2>2 \text{　かつ　} x+y<0 \end{cases} \qquad \cdots ①$$

となる。また,

$$\log_2 \frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$$

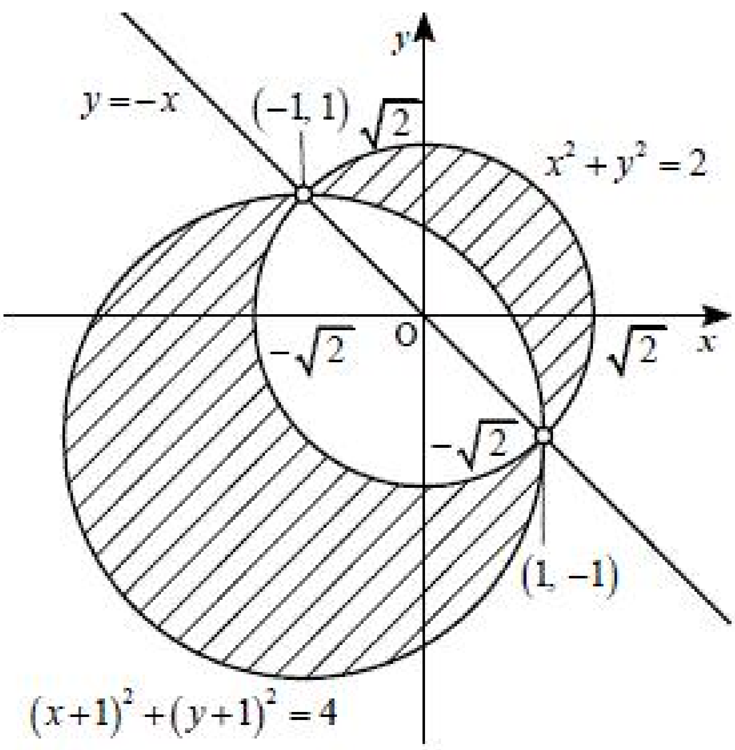
より,

$$\frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2-y^2 \leqq 2(x+y) \text{　かつ　} x+y>0 \\ \qquad\qquad\text{または} \\ 2-x^2-y^2 \geqq 2(x+y) \text{　かつ} x+y<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2 \geqq 4 \text{　かつ　} y>-x \\ \qquad\qquad\text{または} \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \leqq 4 \text{　かつ　} y<-x \end{cases} \qquad \cdots ②$$

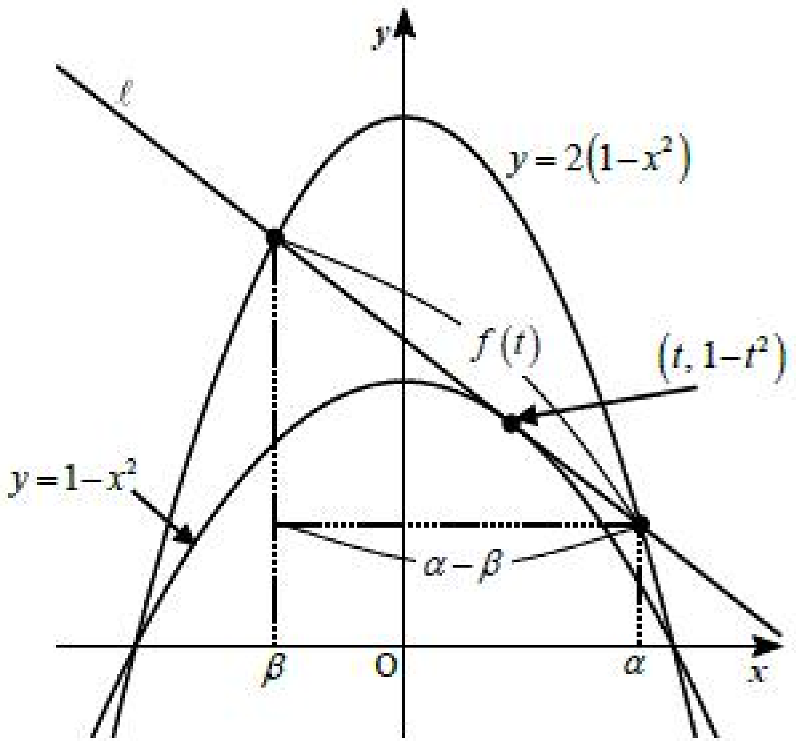
となる。$\log_2 \dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$を満たす点$(x, y)$が存在する範囲は, ①と②を満たす$(x, y)$の範囲であるから, ①かつ②を図示すると下記の通りになる。(境界は$x^2+y^2=2$の部分は含まず, 他は含む。)



(答) 前図

II

(1)



$g(x)=1-x^2$ とすると,

$$g'(x)=-2x$$

より, ℓ の方程式は,

$$y=-2t(x-t)+1-t^2$$
$$=-2tx+1+t^2$$

と表せる。よって, ℓ と $y=2(1-x^2)$ の交点の x 座標は,

$$-2tx+1+t^2=2-2x^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-2tx+t^2-1=0 \quad \cdots ①$$

の解である。この解を $\alpha, \beta\ (\alpha>\beta)$ とおくと, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=t\\ \alpha\beta=\dfrac{t^2-1}{2}\end{cases}$$

が成り立つ。よって, $\alpha>\beta$ より,

$$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{2-t^2}$$

と求まる。また, ℓ は傾きが $-2t$ なので,

$$f(t):(\alpha-\beta)=\sqrt{1^2+(-2t)^2}:1$$

となり,

$$f(t)=\sqrt{(4t^2+1)(2-t^2)}$$
$$=\sqrt{-4t^4+7t^2+2}$$

と求まる。

(答) $f(t)=\sqrt{-4t^4+7t^2+2}$

(2)

(1)の答えより,

$$f(t)=\sqrt{-4t^4+7t^2+2}$$
$$=\sqrt{-4\left(t^2-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{81}{16}}$$

と平方完成できる。$0\leqq t\leqq 1$ より,

$$0\leqq t^2\leqq 1$$

となるので, $f(t)$ は,

$t^2=\dfrac{7}{8}$, すなわち $t=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ のとき, 最大値 $\dfrac{9}{4}$

$t^2=0$, すなわち $t=0$ のとき, 最小値 $\sqrt{2}$

をとる。

(答) 最大値: $\dfrac{9}{4}$ ($t=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ のとき), 最小値: $\sqrt{2}$ ($t=0$ のとき)

Ⅲ

(1)

$$\int x\log(1+x)\,dx=\frac{1}{2}x^2\log(1+x)-\int\frac{x^2}{2(1+x)}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\log(1+x)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2+C$$

と求まる。(但し，C は積分定数)

(答) $\int x\log(1+x)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2+C$

(2)

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{2}{n^2}}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{3}{n^2}}\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n}{n^2}}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

より，両辺の自然対数をとると，

$$\log a_n=\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{n}{n^2}\log\left(1+\frac{n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

となるので，区分求積法より，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\int_0^1 x\log(1+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2\right]_0^1\ (\because (1))$$
$$=\frac{1}{4}$$

と求まる。以上より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{4}}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{4}}$