$\boxed{\text{I}}$

(1)

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\dfrac{4-h\cdot h}{2+h}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{-h}{h}$$
$$=-1$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{4-(-h)\cdot h}{2+h}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{h-2}{2+h}$$
$$=-1$$

であるから，$f'(0)$の値は存在し，

$$f'(0)=-1$$

である。

(答) $f'(0)=-1$

(2)

①より，

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=-1 \qquad ・・・②$$

また，$x<0$のとき，

$$f(x)=\frac{4+x^2}{2+x}=x-2+\frac{8}{x+2} \qquad ・・・(**)$$

であるから，$x<0$のとき，

$$f'(x)=\frac{2x(2+x)-(4+x^2)}{(2+x)^2}$$
$$=\frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$$

と計算できる。よって，

$$\lim_{x\to-0}f'(x)=-1 \qquad ・・・③$$

と求まる。②，③より，$f'(x)$は$x=0$で連続である。

(証明終)

(3)

(*)と(**)より，

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(2-x)dx+\int_{-1}^{0}\left(x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}(x-2)^2+8\log(x+2)\right]_{-1}^0$$
$$=2-\frac{1}{2}+2+8\log 2-\frac{9}{2}$$
$$=8\log 2-1$$

と求まる。

(答) $\int_{-1}^{1}f(x)dx=8\log 2-1$

II

(1)

数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき,

$$P_1(\cos x)=\cos x$$
$$\sin x Q_1(\cos x)=\sin x$$

より,成り立つ。

[2] $n=k$ のとき,題意が成立すると仮定すると,$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned}P_{k+1}(\cos x)&=\cos x P_k(\cos x)-(1-\cos^2 x)Q_k(\cos x)\\&=\cos x\cos kx-\sin x\cdot\sin x Q_k(\cos x)\\&=\cos x\cos kx-\sin x\sin kx\\&=\cos(k+1)x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x Q_{k+1}(\cos x)&=\sin x\cdot(P_k(\cos x)+\cos x Q_k(\cos x))\\&=\sin x\cos kx+\cos x\cdot\sin x Q_k(\cos x)\\&=\sin x\cos kx+\cos x\sin kx\\&=\sin(k+1)x\end{aligned}$$

と計算できるので,$n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2]より,すべての自然数 n について題意は成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)の式に $x=0$ を代入して,

$$P_n(1)=1$$

と求まる。これより,$n\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}Q_n(1)&=P_{n-1}(1)+Q_{n-1}(1)\\&=Q_{n-1}(1)+1\end{aligned}$$

であるから,$Q_1(1)=1$ より,

$$Q_n(1)=n$$

と求まる。これは $n=1$ でも成り立つ。

(答) $P_n(1)=1,\ Q_n(1)=n$

(3)

$-1\leqq t\leqq 1$ より,

$$t=\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$$

として,$P_6(\cos x)=1$ なる $\cos x$ を求めればよい。ここで,(1)より,

$$P_6(\cos x)=\cos 6x$$

であるから,

$$P_6(\cos x)=1$$
$$\Leftrightarrow \cos 6x=1$$
$$\Leftrightarrow 6x=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi\quad(\because 0\leqq 6x\leqq 6\pi)$$
$$\therefore x=0,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$$

と求まる。よって,求める t は,

$$t=\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}$$

である。

(答) $t=\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}$

Ⅲ

(1)

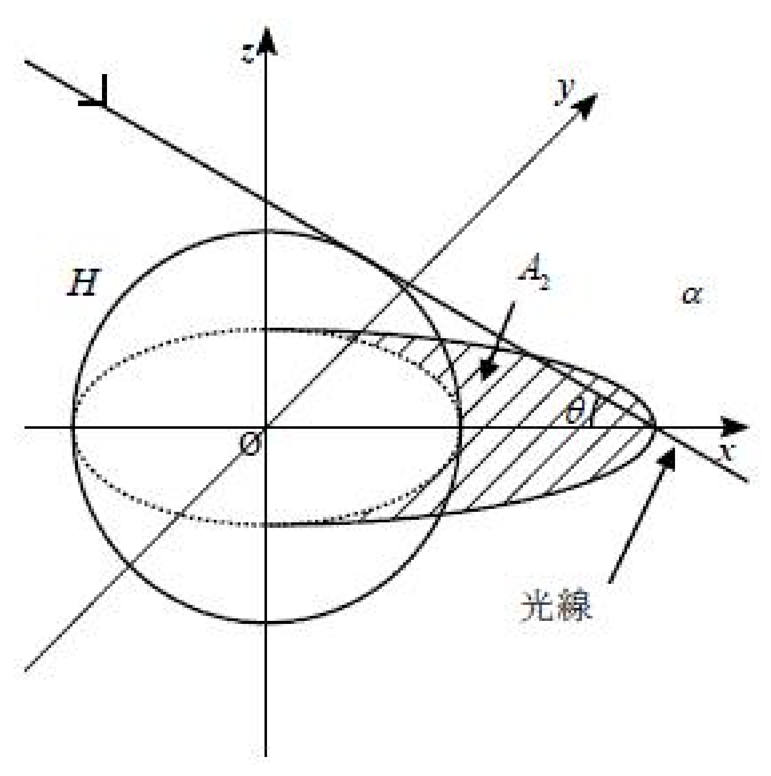


図 1

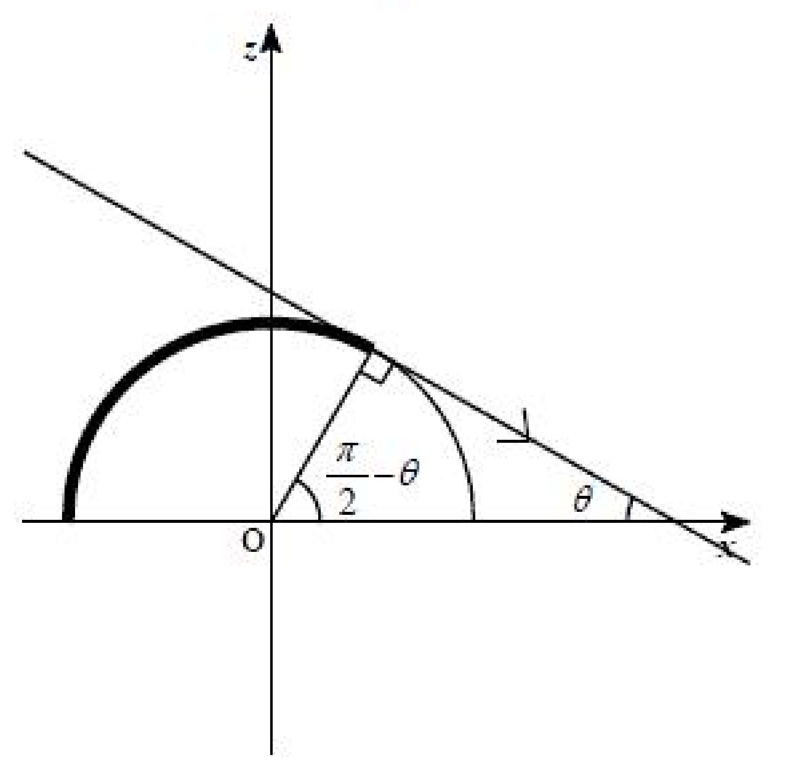


図 2

図 1 のように xyz 軸をとり，xy 平面を α とし，H を S の $z \geqq 0$ の部分となるようにおくと，θ は上図の部分になる。このとき，xz 平面で H を切断してみると，H の表面で光の当たる部分は図 2 のように光線が H に接する部分までである(太線部分)。このことから，A_1 は H の表面の $\dfrac{\frac{\pi}{2}+\theta}{\pi}$ の部分である。H の表面積は，

$$4\pi\times\frac{1}{2}=2\pi$$

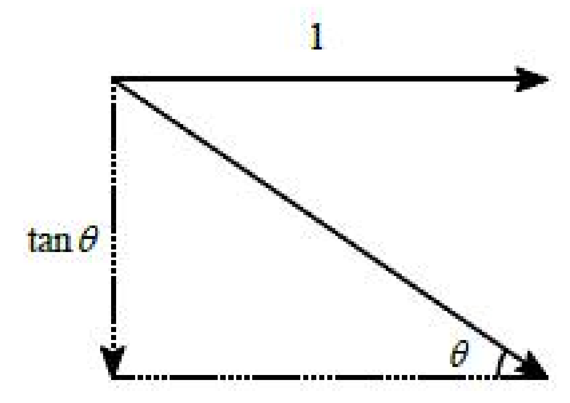
であるから，A_1 の面積は，

$$A_1=2\pi\times\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{\pi}$$
$$=2\theta+\pi$$

と求まる。

(答) $A_1=2\theta+\pi$

(2)



H の表面に接し，α に影を作るような光線を考え，その光線が α につくる軌跡と y 軸，半径 1 の円に囲まれる図形の面積を求めればよい(図 1 の斜線部分)。光線の方向ベクトルは $(1, 0, -\tan\theta)$ と表せるので，光線と H の接点を (p, q, r) とすると，光線と α の交点は，

$$(p, q, r)+k(1, 0, -\tan\theta) \quad (k \text{ は実数})$$
$$=(p+k, q, r-k\tan\theta)$$

と表せる。ここで，z 座標は 0 ($\because$ 交点は α 上)なので，

$$k=\frac{r}{\tan\theta}$$

となる。また，

$$p^2+q^2+r^2=1$$
$$\Leftrightarrow p^2+r^2=1-q^2$$

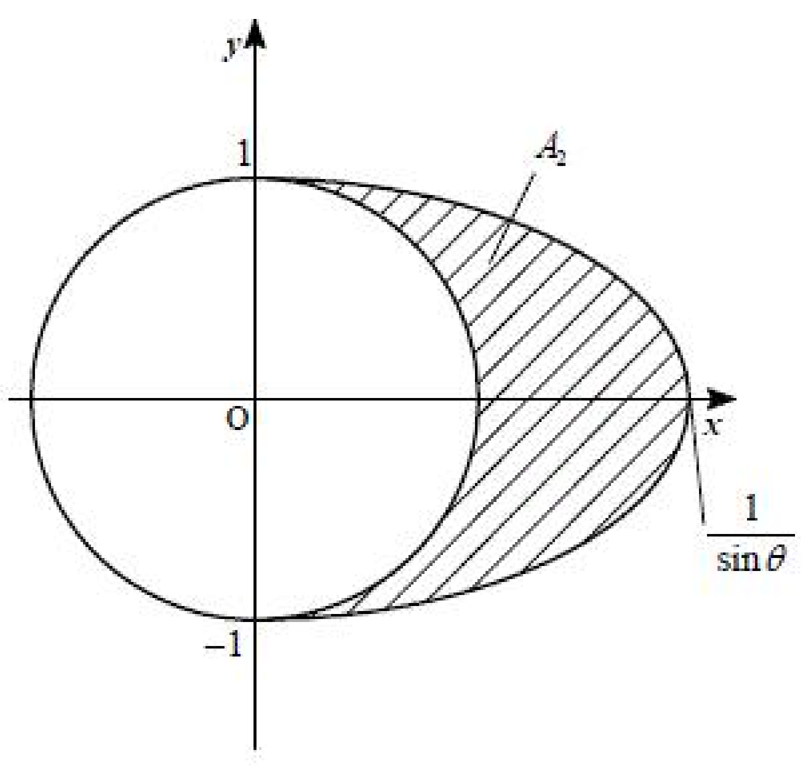
であり，zx 平面に平行な断面で見たとき，図 2 のように光線が (p, q, r) で H と接しているので，

$$p=\sqrt{1-q^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\sqrt{1-q^2}\sin\theta$$
$$r=\sqrt{1-q^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\sqrt{1-q^2}\cos\theta$$

と表せる。これを①に代入して，交点は，

$$\left(\sqrt{1-q^2}\sin\theta+\sqrt{1-q^2}\frac{\cos\theta}{\tan\theta}, q, 0\right)$$
$$=\left(\sqrt{1-q^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}, q, 0\right)$$

と求まる。



このことと，$-1 \leqq q \leqq 1$ とあわせて，求める面積は，

q	$-1 \to 1$
t	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$$A_2=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-q^2}\,dq-1\cdot1\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt-\frac{\pi}{2} \quad (q=\sin t \text{ とおいた})$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2\sin\theta}-\frac{\pi}{2}$$

と求まる。

(答) $A_2=\dfrac{\pi}{2\sin\theta}-\dfrac{\pi}{2}$

(3)

(1), (2)の答えより，

$$A_1+A_2=\frac{\pi}{2}+2\theta+\frac{\pi}{2\sin\theta}$$

と表せる。上式の右辺を $f(\theta)$ とすると，

$$f'(\theta)=2-\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}\pi$$

となるので，

$$f'(\theta)=0 \Leftrightarrow \sin^2\theta=\frac{\pi}{4}\cos\theta$$

となる。よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に上式を代入すると，

$$\cos^2\theta+\frac{\pi}{4}\cos\theta-1=0$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{-\pi\pm\sqrt{\pi^2+64}}{8}$$
$$\therefore \cos\theta=\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+64}}{8} \quad (\because \cos\theta \geqq 0)$$

と求まる。このときの θ を θ_1 とすると，$f(\theta)$ の増減表は下記の通りになる。

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		−	0	+	
$f(\theta)$		↘	最小	↗	

以上より，$\theta_0=\theta_1$ であり，

$$\cos\theta_0=\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+64}}{8}$$

と求まる。

(答) $\cos\theta_0=\dfrac{-\pi+\sqrt{\pi^2+64}}{8}$