$\boxed{\text{I}}$

真数条件より，

$$\frac{2-x^2-y^2}{x+y}>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2<2 \text{ かつ } x+y>0 \\ \text{または} \\ x^2+y^2>2 \text{ かつ } x+y<0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

となる。また，

$$\log_2 \frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$$

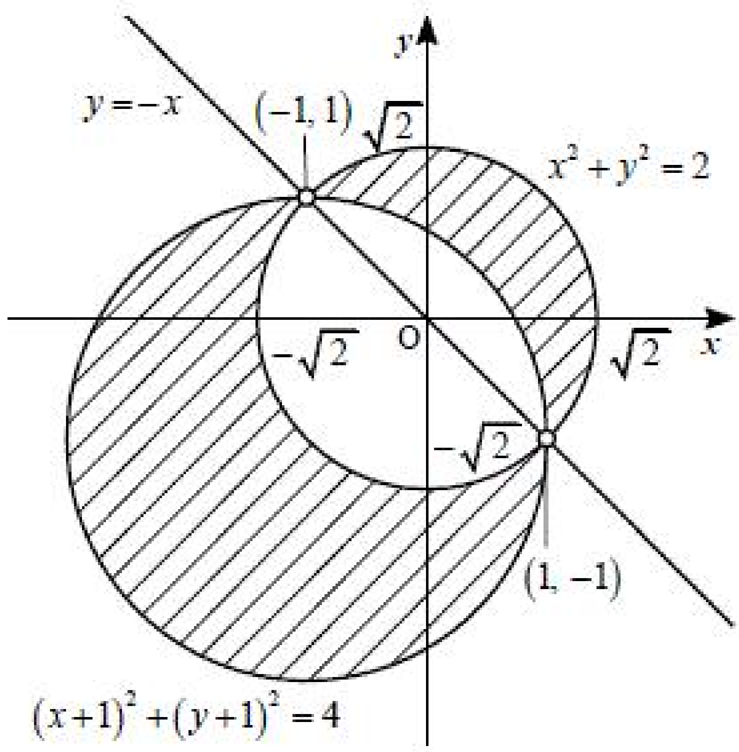
より，

$$\frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2-y^2 \leqq 2(x+y) \text{ かつ } x+y>0 \\ \text{または} \\ 2-x^2-y^2 \geqq 2(x+y) \text{ かつ } x+y<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2 \geqq 4 \text{ かつ } y>-x \\ \text{または} \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \leqq 4 \text{ かつ } y<-x \end{cases} \quad \cdots ②$$

となる。$\log_2 \frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$ を満たす点(x, y)が存在する範囲は，①と②を満たす(x, y)の範囲であるから，①かつ②を図示すると下記の通りになる。(境界は$x^2+y^2=2$の部分は含まず，他は含む。)



(答) 前図

Ⅱ

(1)

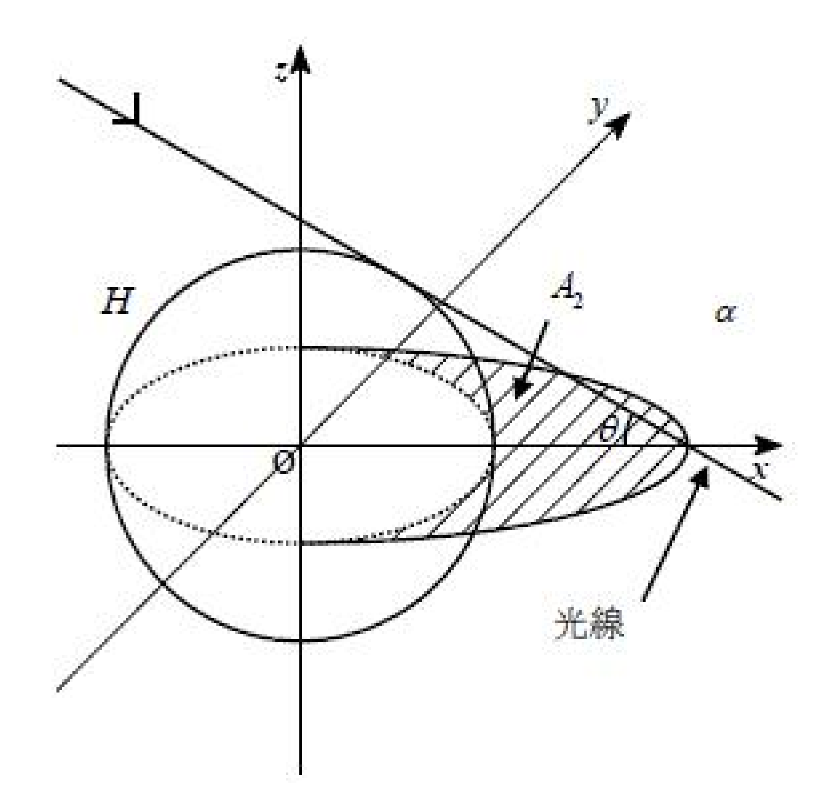


図 1

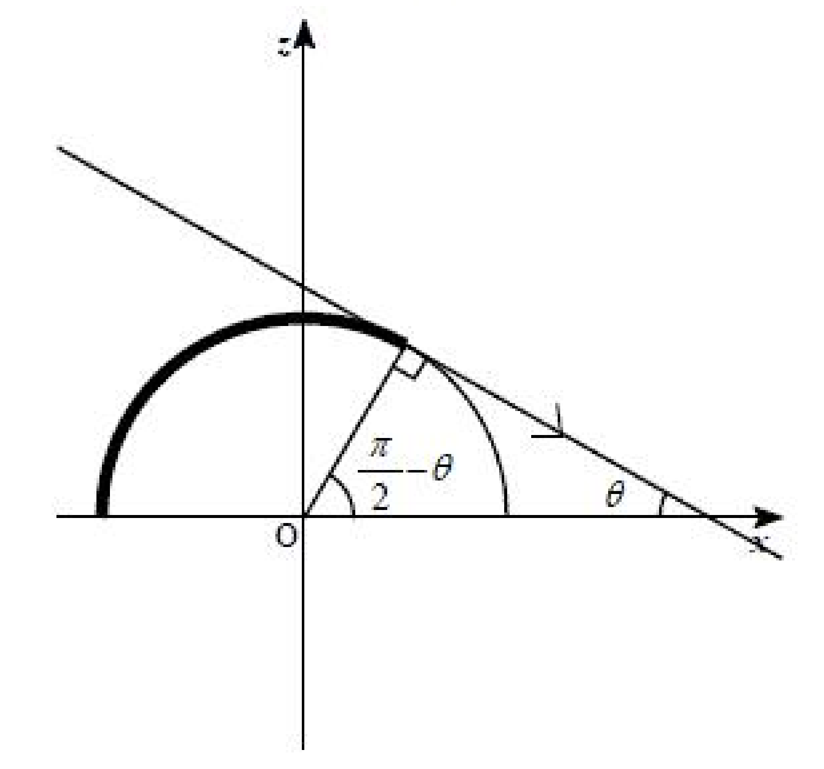


図 2

図 1 のように xyz 軸をとり，xy 平面を α とし，H を S の $z \geqq 0$ の部分となるようにおくと，θ は上図の部分になる。このとき，xz 平面で H を切断してみると，H の表面で光の当たる部分は図 2 のように光線が H に接する部分までである(太線部分)。このことから，A_1 は H の表面の $\dfrac{\frac{\pi}{2}+\theta}{\pi}$ の部分である。H の表面積は，

$$4\pi\times\frac{1}{2}=2\pi$$

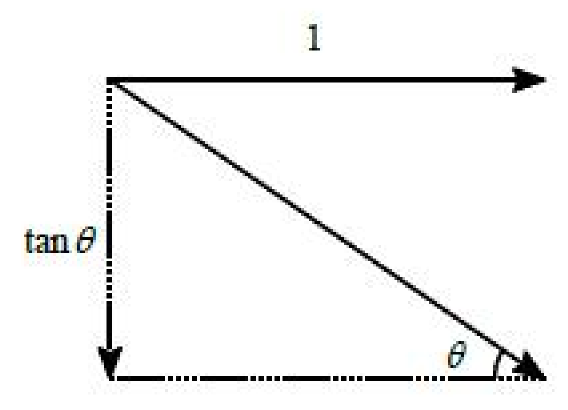
であるから，A_1 の面積は，

$$A_1=2\pi\times\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{\pi}$$
$$=2\theta+\pi$$

と求まる。

(答) $A_1=2\theta+\pi$

(2)



H の表面に接し，α に影を作るような光線を考え，その光線が α につくる軌跡と y 軸，半径 1 の円に囲まれる図形の面積を求めればよい(図 1 の斜線部分)。光線の方向ベクトルは $(1,0,-\tan\theta)$ と表せるので，光線と H の接点を (p,q,r) とすると，光線と α の交点は，

$$(p,q,r)+k(1,0,-\tan\theta)\quad (k \text{ は実数})$$
$$=(p+k,q,r-k\tan\theta)$$

と表せる。ここで，z 座標は 0 ($\because$ 交点は α 上)なので，

$$k=\frac{r}{\tan\theta}$$

となる。また，

$$p^2+q^2+r^2=1$$
$$\Leftrightarrow p^2+r^2=1-q^2$$

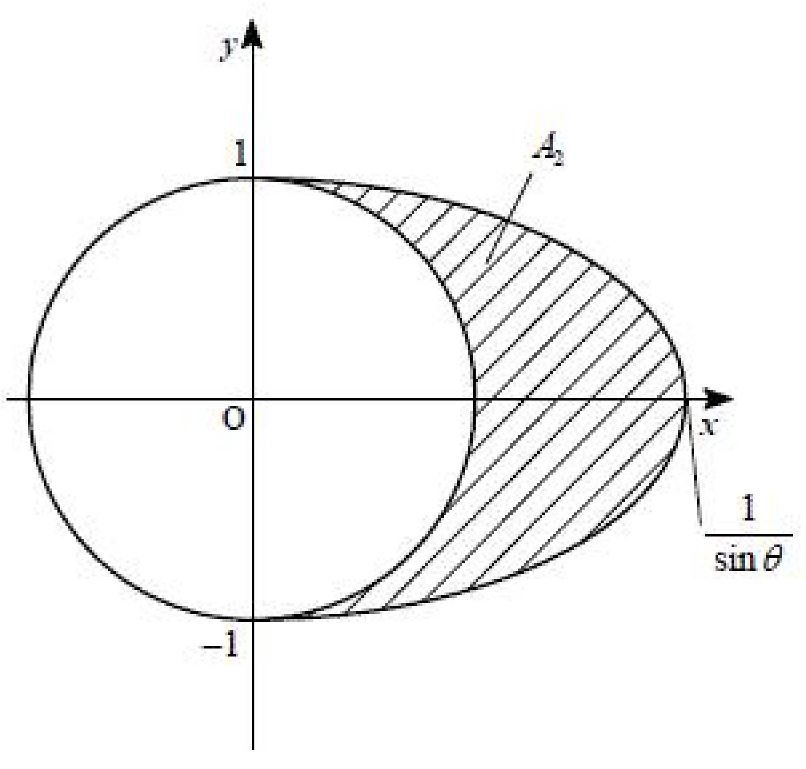
であり，zx 平面に平行な断面で見たとき，図 2 のように光線が (p,q,r) で H と接しているので，

$$p=\sqrt{1-q^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\sqrt{1-q^2}\sin\theta$$
$$r=\sqrt{1-q^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\sqrt{1-q^2}\cos\theta$$

と表せる。これを①に代入して，交点は，

$$\left(\sqrt{1-q^2}\sin\theta+\sqrt{1-q^2}\frac{\cos\theta}{\tan\theta},q,0\right)$$
$$=\left(\sqrt{1-q^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta},q,0\right)$$

と求まる。



このことと，$-1\leqq q\leqq 1$ とあわせて，求める面積は，

q	$-1\to 1$
t	$-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$

$$A_2=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-q^2}\,dq-1\cdot1\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt-\frac{\pi}{2}\quad (q=\sin t \text{ とおいた})$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2\sin\theta}-\frac{\pi}{2}$$

と求まる。

(答) $A_2=\dfrac{\pi}{2\sin\theta}-\dfrac{\pi}{2}$

(3)

(1), (2)の答えより，

$$A_1+A_2=\frac{\pi}{2}+2\theta+\frac{\pi}{2\sin\theta}$$

と表せる。上式の右辺を $f(\theta)$ とすると，

$$f'(\theta)=2-\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}\pi$$

となるので，

$$f'(\theta)=0\Leftrightarrow\sin^2\theta=\frac{\pi}{4}\cos\theta$$

となる。よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に上式を代入すると，

$$\cos^2\theta+\frac{\pi}{4}\cos\theta-1=0$$
$$\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{-\pi\pm\sqrt{\pi^2+64}}{8}$$

$$\therefore\cos\theta=\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+64}}{8}\ (\because\cos\theta\geqq 0)$$

と求まる。このときの θ を θ_1 とすると，$f(\theta)$ の増減表は下記の通りになる。

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	+	
$f(\theta)$		↘	最小	↗	

以上より，$\theta_0=\theta_1$ であり，

$$\cos\theta_0=\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+64}}{8}$$

と求まる。

(答) $\cos\theta_0=\dfrac{-\pi+\sqrt{\pi^2+64}}{8}$

III

(1)

$n=1,2,3,\cdots$ に対して，

$$t_1=1,\ u_1=0,\ t_{n+1}=t_n-u_n,\ u_{n+1}=at_n \qquad \cdots ①$$

であるとき，

$$(AB)^n=t_nAB-u_nE,\ (BA)^n=t_nBA-u_nE \qquad \cdots ②$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき，

$$t_1(AB)^1-u_1E=AB$$
$$t_1(BA)^1-u_1E=BA$$

となり，ともに成立する。

[2] $n=k$ のとき，②が成り立つと仮定すると，

$$(AB)^k=t_kAB-u_kE$$
$$(BA)^k=t_kBA-u_kE$$

である。このとき，

$$\begin{aligned}(AB)^{k+1}&=(AB)^k\cdot AB\\&=(t_kAB-u_kE)\cdot AB\\&=t_k(AB)^2-u_kAB\end{aligned}$$

と変形できる。ここで，

$$AB=\begin{pmatrix}a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$$

であるから，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$(AB)^2-AB+aE=O$$
$$\Leftrightarrow (AB)^2=AB-aE$$

となる。よって，

$$\begin{aligned}(AB)^{k+1}&=t_k(AB-aE)-u_kAB\\&=(t_k-u_k)AB-at_kE\\&=t_{k+1}AB-u_{k+1}E\ (\because ①)\end{aligned}$$

と求まる。同様にして，$BA=\begin{pmatrix}a & a\\ -a & 1-a\end{pmatrix}$ より，ケーリー・ハミルトンの定理から，

$$(BA)^2=BA-aE$$

であるから，

$$\begin{aligned}(BA)^{k+1}&=(BA)^k\cdot BA\\&=(t_kBA-u_kE)\cdot BA\\&=t_k(BA)^2-u_kBA\\&=t_k(BA-aE)-u_kBA\\&=(t_k-u_k)BA-at_kE\\&=t_{k+1}BA-u_{k+1}E\ (\because ①)\end{aligned}$$

と求まる。したがって，$n=k+1$ のときも②は成り立つ。

[1], [2]より，すべての自然数 n について②は成立することが示された。

(証明終)

(2)

①より，$n=1,2,3,\cdots,6$ に対して t_n, u_n の値は以下の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6
t_n	1	1	$1-a$	$1-2a$	$1-3a+a^2$	$1-4a+3a^2$
u_n	0	a	a	$a-a^2$	$a-2a^2$	

(答) $t_2=1,\ t_3=1-a,\ t_4=1-2a\ ,t_5=1-3a+a^2,\ t_6=1-4a+3a^2$

(3)

(1)の結果より，$n=1,2,3,\cdots$ について

$$\begin{aligned}(AB)^n-(BA)^n&=(t_nAB-u_nE)-(t_nBA-u_nE)\\&=t_n(AB-BA)\end{aligned}$$

である。$AB\neq BA$ のもとでは

$$(AB)^n=(BA)^n\Leftrightarrow t_n=0$$
$$(AB)^n\neq(BA)^n\Leftrightarrow t_n\neq 0$$

となる。よって，$(AB)^n\neq(BA)^n\ (n=2,3,4,5)$ が成り立つとき，

$$t_n\neq 0\ (n=2,3,4,5) \qquad \cdots ③$$

であり，また，$(AB)^6=(BA)^6$ が成り立つとき，

$$t_6=0$$

となる。(2)の結果より，

$$t_6=0$$
$$\Leftrightarrow 1-4a+3a^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=1,\ \frac{1}{3}$$

である。

[1] $a=1$ のとき

$t_3=0$ となり，③を満たさず不適である。

[2] $a=\frac{1}{3}$ のとき

$$t_2=1,\ t_3=\frac{2}{3},\ t_4=\frac{1}{3},\ t_5=\frac{1}{9}$$

となるから，③を満たす。

以上より，求める a の値は，

$$a=\frac{1}{3}$$

となる。

(答) $a=\frac{1}{3}$