I

真数条件より，

$$\frac{2-x^2-y^2}{x+y}>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2<2 \text{ かつ } x+y>0 \\ \text{または} \\ x^2+y^2>2 \text{ かつ } x+y<0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

となる。また，

$$\log_2 \frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$$

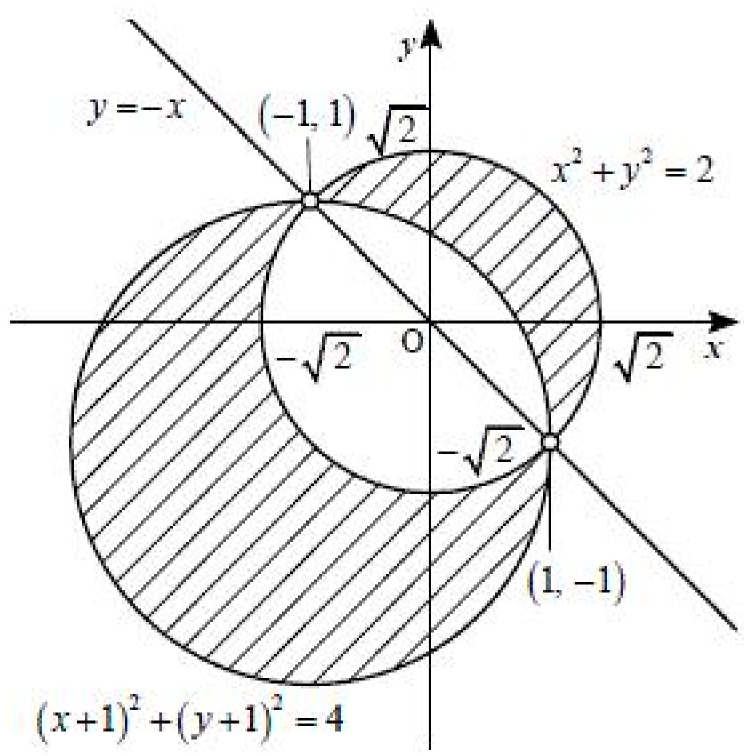
より，

$$\frac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2-y^2 \leqq 2(x+y) \text{ かつ } x+y>0 \\ \text{または} \\ 2-x^2-y^2 \geqq 2(x+y) \text{ かつ } x+y<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2 \geqq 4 \text{ かつ } y>-x \\ \text{または} \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \leqq 4 \text{ かつ } y<-x \end{cases} \quad \cdots ②$$

となる。$\log_2 \dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する範囲は，①と②を満たす $(x,\ y)$ の範囲であるから，①かつ②を図示すると下記の通りになる。(境界は $x^2+y^2=2$ の部分は含まず，他は含む。)



(答) 前図

Ⅱ

(1)

$$\int x\log(1+x)dx=\frac{1}{2}x^2\log(1+x)-\int\frac{x^2}{2(1+x)}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\log(1+x)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2+C$$

と求まる。(但し，C は積分定数)

(答) $\int x\log(1+x)dx=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2+C$

(2)

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{2}{n^2}}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{3}{n^2}}\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n}{n^2}}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

より，両辺の自然対数をとると，

$$\log a_n=\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{n}{n^2}\log\left(1+\frac{n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

となるので，区分求積法より，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\int_0^1 x\log(1+x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2\right]_0^1\ (\because(1))$$
$$=\frac{1}{4}$$

と求まる。以上より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{4}}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{4}}$

Ⅲ

(1)

$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$t_1=1, u_1=0, t_{n+1}=t_n-u_n, u_{n+1}=at_n \quad \cdots ①$$

であるとき，

$$(AB)^n=t_nAB-u_nE, (BA)^n=t_nBA-u_nE \quad \cdots ②$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき，

$$t_1(AB)^1-u_1E=AB$$
$$t_1(BA)^1-u_1E=BA$$

となり，ともに成立する。

[2] $n=k$ のとき，②が成り立つと仮定すると，

$$(AB)^k=t_kAB-u_kE$$
$$(BA)^k=t_kBA-u_kE$$

である。このとき，

$$\begin{aligned}(AB)^{k+1}&=(AB)^k\cdot AB\\&=(t_kAB-u_kE)\cdot AB\\&=t_k(AB)^2-u_kAB\end{aligned}$$

と変形できる。ここで，

$$AB=\begin{pmatrix}a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$$

であるから，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$(AB)^2-AB+aE=O$$
$$\Leftrightarrow (AB)^2=AB-aE$$

となる。よって，

$$\begin{aligned}(AB)^{k+1}&=t_k(AB-aE)-u_kAB\\&=(t_k-u_k)AB-at_kE\\&=t_{k+1}AB-u_{k+1}E\ (\because ①)\end{aligned}$$

と求まる。同様にして，$BA=\begin{pmatrix}a & a\\ -a & 1-a\end{pmatrix}$ より，ケーリー・ハミルトンの定理から，

$$(BA)^2=BA-aE$$

であるから，

$$\begin{aligned}(BA)^{k+1}&=(BA)^k\cdot BA\\&=(t_kBA-u_kE)\cdot BA\\&=t_k(BA)^2-u_kBA\\&=t_k(BA-aE)-u_kBA\\&=(t_k-u_k)BA-at_kE\\&=t_{k+1}BA-u_{k+1}E\ (\because ①)\end{aligned}$$

と求まる。したがって，$n=k+1$ のときも②は成り立つ。

[1], [2]より，すべての自然数 n について②は成立することが示された。

(証明終)

(2)

①より，$n=1, 2, 3, \cdots, 6$ に対して t_n, u_n の値は以下の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6
t_n	1	1	$1-a$	$1-2a$	$1-3a+a^2$	$1-4a+3a^2$
u_n	0	a	a	$a-a^2$	$a-2a^2$	

(答) $t_2=1, t_3=1-a, t_4=1-2a, t_5=1-3a+a^2, t_6=1-4a+3a^2$

(3)

(1)の結果より，$n=1, 2, 3, \cdots$ について

$$\begin{aligned}(AB)^n-(BA)^n&=(t_nAB-u_nE)-(t_nBA-u_nE)\\&=t_n(AB-BA)\end{aligned}$$

である。$AB\neq BA$ のもとでは

$$(AB)^n=(BA)^n \Leftrightarrow t_n=0$$
$$(AB)^n\neq(BA)^n \Leftrightarrow t_n\neq 0$$

となる。よって，$(AB)^n\neq(BA)^n\ (n=2, 3, 4, 5)$ が成り立つとき，

$$t_n\neq 0\ (n=2, 3, 4, 5) \quad \cdots ③$$

であり，また，$(AB)^6=(BA)^6$ が成り立つとき，

$$t_6=0$$

となる。(2)の結果より，

$$t_6=0$$
$$\Leftrightarrow 1-4a+3a^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=1, \frac{1}{3}$$

である。

[1] $a=1$ のとき

$t_3=0$ となり，③を満たさず不適である。

[2] $a=\frac{1}{3}$ のとき

$$t_2=1, t_3=\frac{2}{3}, t_4=\frac{1}{3}, t_5=\frac{1}{9}$$

となるから，③を満たす。

以上より，求める a の値は，

$$a=\frac{1}{3}$$

となる。

(答) $a=\frac{1}{3}$