

- (1) n^2 が偶数のとき、 n は偶数である。

よって、 $n=2k$ (k は自然数) とおける。このとき

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

が成り立つので、 n^2 が偶数のとき、 n^2 は4で割り切れる。

(証明終)

- (2) n^2-1 が偶数のとき、 n^2 は奇数である。

よって n は奇数であり、 $n=2k-1$ (k は自然数) とおける。このとき

$$n^2 - 1 = (2k-1)^2 - 1 = 4k(k-1)$$

が成り立つ。ここで、 $k, k-1$ は連続する整数なので、 $k(k-1)$ は偶数である。

よって、 n^2-1 が偶数のとき、 n^2-1 は8で割り切れる。

(証明終)

- (3) $2^{4n} - 1 = (2^{2n} + 1)(2^{2n} - 1) = (2^{2n} + 1)(2^n - 1)(2^n + 1)$

ここで、 2^n を3で割ったときの余りは1か2のどちらかなので、

$2^n - 1, 2^n + 1$ のいずれかは3の倍数になる。

さらに、 2^n を5で割ったときの余りが1か4の場合

$2^n - 1, 2^n + 1$ のいずれかは5の倍数になるので、 $2^{4n} - 1$ は15の倍数になる。

残りは、 2^n を5で割ったときの余りが2か3の場合であり

それぞれ $2^n = 5k - 3, 5k - 2$ (k は自然数) とおける。このとき

$$2^{2n} + 1 = (5k - 3)^2 + 1 = 5(5k^2 - 6k + 2)$$

$$2^{2n} + 1 = (5k - 2)^2 + 1 = 5(5k^2 - 4k + 1)$$

となり、いずれの場合も $2^{2n} + 1$ は5の倍数になるので、 $2^{4n} - 1$ は15の倍数になる。

以上より、 $2^{4n} - 1$ は15で割り切れる。

(証明終)

II

$6 \sin \theta - 5 \sin 2\theta + \sin 4\theta$ を整理する。

$$\begin{aligned} & 6 \sin \theta - 5 \sin 2\theta + \sin 4\theta \\ &= 6 \sin \theta - 10 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= 6 \sin \theta - 10 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \sin \theta \{ 6 - 10 \cos \theta + 4 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \} \\ &= 2 \sin \theta (\cos \theta - 1) (2 \cos \theta - 1) (2 \cos \theta + 3) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & 6 \sin \theta - 5 \sin 2\theta + \sin 4\theta < 0 \\ & \Leftrightarrow 2 \sin \theta (\cos \theta - 1) (2 \cos \theta - 1) (2 \cos \theta + 3) < 0 \end{aligned}$$

さらに, $2 \cos \theta + 3 > 0$, $\cos \theta - 1 \leq 0$ (等号は $\theta = 0$ のとき) を考慮すると,

$$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) > 0, 0 < \theta < 2\pi$$

を解けばよいことが分かる。

(i) $\sin \theta > 0$, $2 \cos \theta - 1 > 0$ のとき

$$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

(ii) $\sin \theta < 0$, $2 \cos \theta - 1 < 0$ のとき

$$\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

以上より, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, $\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(答) $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, $\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(a) &= \int_a^{a+1} \left\{ \pi (\log x)^2 \right\} dx \\
 &= \pi \left[x (\log x)^2 \right]_a^{a+1} - 2\pi \int_a^{a+1} (x)' \log x dx \\
 &= \pi \left[x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_a^{a+1} \\
 &= \pi \left\{ (a+1) \{ \log(a+1) \}^2 - a (\log a)^2 - 2(a+1) \log(a+1) + 2a \log a + 2 \right\} \\
 f'(a) &= \pi \left\{ \{ \log(a+1) \}^2 + 2 \log(a+1) - (\log a)^2 - 2 \log a - 2 \log(a+1) + 2 \log a \right\} \\
 &= \pi \left\{ \{ \log(a+1) \}^2 - (\log a)^2 \right\} \\
 (\text{答}) \quad f(a) &= \pi \left\{ (a+1) \{ \log(a+1) \}^2 - a (\log a)^2 - 2(a+1) \log(a+1) + 2a \log a + 2 \right\} \\
 f'(a) &= \pi \left\{ \{ \log(a+1) \}^2 - (\log a)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad f'(a) = \pi \log \left(\frac{a+1}{a} \right) \left[\log \{ a(a+1) \} \right] \text{であり,}$$

$$\frac{a+1}{a} > 1 (\because a > 0) \text{より, } \log \left(\frac{a+1}{a} \right) > 0 \text{であるので,}$$

$$\begin{aligned}
 f'(a) = 0 &\Leftrightarrow \log \{ a(a+1) \} = 0 \\
 &\Leftrightarrow a(a+1) = 1 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

よって、 $a > 0$ における $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で $f(a)$ は最小値をとる。よって、最小値は

$$\begin{aligned}
 &f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \\
 (\text{答}) \quad &\pi \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right]
 \end{aligned}$$