

$$\begin{aligned}
(1) \quad f(a) &= \int_a^{a+1} \left\{ \pi (\log x)^2 \right\} dx \\
&= \pi \left[x (\log x)^2 \right]_a^{a+1} - 2\pi \int_a^{a+1} (x)' \log x dx \\
&= \pi \left[x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_a^{a+1} \\
&= \pi \left\{ (a+1) \{ \log(a+1) \}^2 - a (\log a)^2 - 2(a+1) \log(a+1) + 2a \log a + 2 \right\} \\
f'(a) &= \pi \left\{ \{ \log(a+1) \}^2 + 2 \log(a+1) - (\log a)^2 - 2 \log a - 2 \log(a+1) + 2 \log a \right\} \\
&= \pi \left\{ \{ \log(a+1) \}^2 - (\log a)^2 \right\} \\
(\text{答}) \quad f(a) &= \pi \left\{ (a+1) \{ \log(a+1) \}^2 - a (\log a)^2 - 2(a+1) \log(a+1) + 2a \log a + 2 \right\} \\
f'(a) &= \pi \left\{ \{ \log(a+1) \}^2 - (\log a)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$(2) \quad f'(a) = \pi \log \left(\frac{a+1}{a} \right) \left[\log \{ a(a+1) \} \right] \text{ であり,}$$

$$\frac{a+1}{a} > 1 \quad (\because a > 0) \text{ より, } \log \left(\frac{a+1}{a} \right) > 0 \text{ であるので,}$$

$$\begin{aligned}
f'(a) = 0 &\Leftrightarrow \log \{ a(a+1) \} = 0 \\
&\Leftrightarrow a(a+1) = 1 \\
&\Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because a > 0)
\end{aligned}$$

よって、 $a > 0$ における $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で $f(a)$ は最小値をとる。よって、最小値は

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \pi \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \\
(\text{答}) \quad &\pi \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ \log \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right]
\end{aligned}$$

$$(1) \quad y = \frac{e^{x-1}}{2x}$$

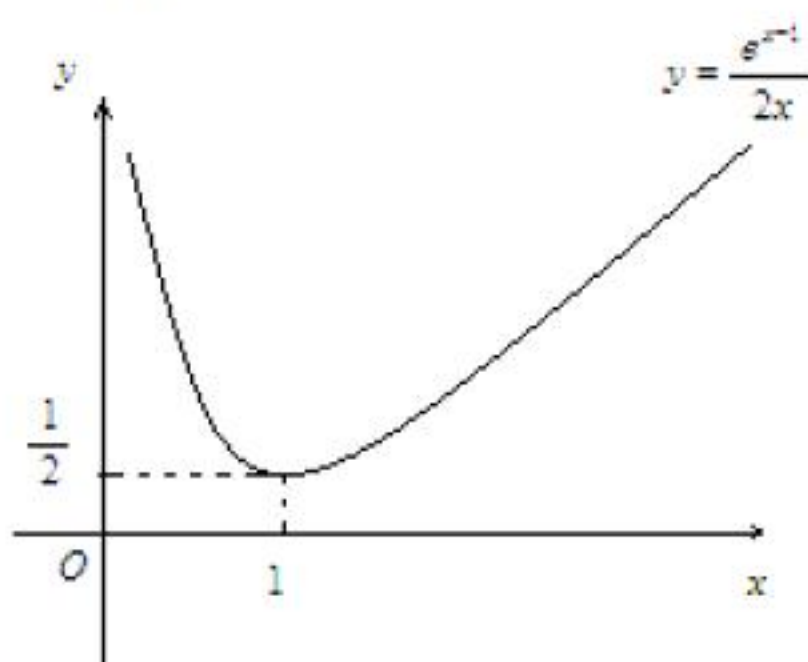
$$y' = \frac{2xe^{x-1} - 2e^{x-1}}{4x^2} = \frac{(x-1)e^{x-1}}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{xe^{x-1} \cdot 2x^2 - 4x(x-1)e^{x-1}}{4x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^{x-1}}{2x^3}$$

であることから、 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{2x}$ ($x > 0$) の増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+		+
$f(x)$			$\frac{1}{2}$	

さらに、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ であることから、グラフは次のようになる。



(答)

グラフより、 y のとりうる値の範囲は $\frac{1}{2} \leq y$

(答) $\frac{1}{2} \leq y$

$$(2) \quad (1) \text{で求めた範囲をあてはめると、} \frac{1}{2} \leq \sin t$$

これを満たす t のうち、 $2(k-1)\pi \leq t \leq 2k\pi$ を満たすものを求めると、

$$2(k-1)\pi + \frac{1}{6}\pi \leq t \leq 2(k-1)\pi + \frac{5}{6}\pi$$

$$\left(2k - \frac{11}{6}\right)\pi \leq t \leq \left(2k - \frac{7}{6}\right)\pi$$

$$(答) \quad a_k = \left(2k - \frac{11}{6}\right)\pi, \quad b_k = \left(2k - \frac{7}{6}\right)\pi$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt &= \int_{a_k}^{b_k} \left\{ e^{-t} (-\cos t)' \right\} dt \\ &= \left[e^{-t} (-\cos t) \right]_{a_k}^{b_k} - \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \cos t) dt \quad \cdots \textcircled{1} \\ \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt &= \int_{a_k}^{b_k} \left\{ (-e^{-t})' \sin t \right\} dt \\ &= \left[(-e^{-t}) \sin t \right]_{a_k}^{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \cos t) dt \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{-t} (-\cos t) \right]_{a_k}^{b_k} + \left[(-e^{-t}) \sin t \right]_{a_k}^{b_k} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2k-\frac{7}{6}\right)\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\left(2k-\frac{11}{6}\right)\pi} \\ &\quad \left(\because \cos a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos b_k = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2k-\frac{7}{6}\right)\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\left(2k-\frac{11}{6}\right)\pi} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \\ &= \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right) \\ (答) \quad I_n &= \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n\pi} = 0 \quad \text{なので、}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right) \\ (答) \quad &\frac{1}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right) \end{aligned}$$

III

(1) $f(x)$ を x について微分すると,

$$f'(x) = \frac{1}{k+1} - \sqrt[k+1]{\beta} \frac{1}{k+1} x^{\frac{-k}{k+1}}$$

$f'(x) = 0$ を解くと,

$$x^{\frac{-k}{k+1}} = \beta^{\frac{1}{k+1}}$$

$$x = \sqrt[k]{\beta}$$

であることから, $f(x)$ の $x > 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$\sqrt[k]{\beta}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$$f(\sqrt[k]{\beta}) = \frac{1}{k+1} (\sqrt[k]{\beta} + \alpha) - \sqrt[k]{\beta} = \frac{k}{k+1} \left(\frac{\alpha}{k} - \sqrt[k]{\beta} \right) \geq 0 \quad \left(\because \frac{\alpha}{k} \geq \sqrt[k]{\beta} \right)$$

最小値が 0 以上なので, $f(x) \geq 0$ であることが示された。

(証明終)

(2) 数学的帰納法によって証明する。

[I] $n = 1$ のとき

両辺ともに x_1 となるので成り立つ。

[II] $n = a$ のとき成り立つと仮定する。

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_a}{a} \geq \sqrt[a]{x_1 x_2 \cdots x_a}$$

が成立するので, $x_i > 0$ (i は正の整数) であることから, (1) の式において $k = a$, $\alpha = x_1 + x_2 + \cdots + x_a$, $\beta = x_1 x_2 \cdots x_a$ とおくことができる。

すると, $x_{a+1} \geq 0$ に対して

$$f(x_{a+1}) = \frac{1}{a+1} (x_{a+1} + x_1 + x_2 + \cdots + x_a) - \sqrt[a+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{a+1}} \geq 0$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_a + x_{a+1}}{a+1} \geq \sqrt[a+1]{x_1 x_2 \cdots x_a x_{a+1}}$$

よって, $n = a+1$ のときも成り立つ。

[I], [II] より, n を正の整数とし, $x_i > 0$ (i は正の整数) であるとき,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \text{ が成り立つことが数学的帰納法により示された。}$$

(証明終)

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ なので, (2) で証明した式を用いると,

$$\begin{aligned} & \frac{S}{10} \\ &= \frac{a_1 a_2 (a_3 + a_4 + a_5) + a_1 a_3 (a_4 + a_5) + a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 (a_4 + a_5) + a_2 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5}{10} \\ &\geq \sqrt[10]{(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^6} = \sqrt[5]{M^3} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって,

$$S \geq 10 \sqrt[5]{M^3}$$

(証明終)