

$$(1) \quad y = \frac{e^{x-1}}{2x}$$

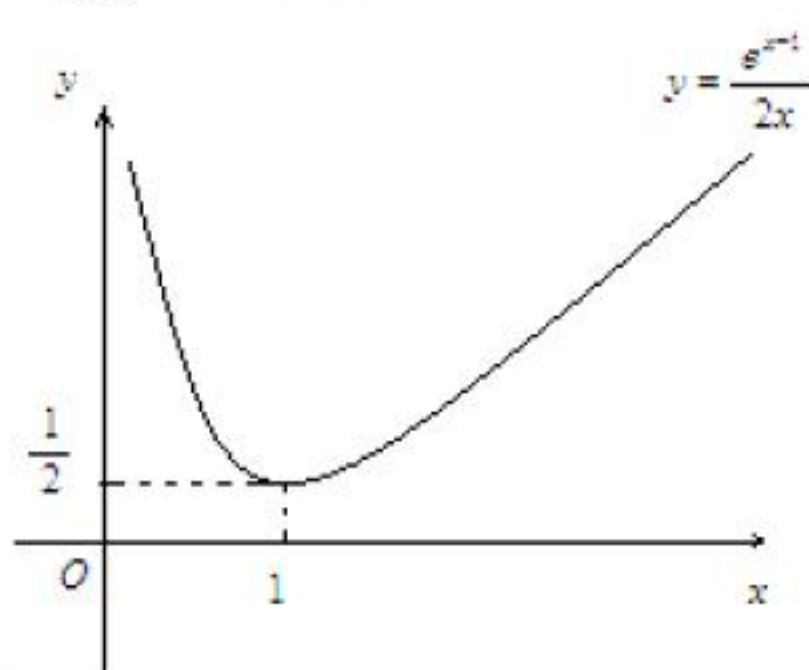
$$y' = \frac{2xe^{x-1} - 2e^{x-1}}{4x^2} = \frac{(x-1)e^{x-1}}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{xe^{x-1} \cdot 2x^2 - 4x(x-1)e^{x-1}}{4x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^{x-1}}{2x^3}$$

であることから、 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{2x}$ ($x > 0$) の増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+		+
$f(x)$			$\frac{1}{2}$	

さらに、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ であることから、グラフは次のようになる。



(答)

グラフより、 y のとりうる値の範囲は $\frac{1}{2} \leq y$

$$(答) \quad \frac{1}{2} \leq y$$

$$(2) \quad (1) \text{で求めた範囲をあてはめると、} \frac{1}{2} \leq \sin t$$

これを満たす t のうち、 $2(k-1)\pi \leq t \leq 2k\pi$ を満たすものを求めると、

$$2(k-1)\pi + \frac{1}{6}\pi \leq t \leq 2(k-1)\pi + \frac{5}{6}\pi$$

$$\left(2k - \frac{11}{6}\right)\pi \leq t \leq \left(2k - \frac{7}{6}\right)\pi$$

$$(答) \quad a_k = \left(2k - \frac{11}{6}\right)\pi, \quad b_k = \left(2k - \frac{7}{6}\right)\pi$$

$$(3) \quad \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt = \int_{a_k}^{b_k} \left\{ e^{-t} (-\cos t)' \right\} dt$$

$$= \left[e^{-t} (-\cos t) \right]_{a_k}^{b_k} - \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \cos t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt = \int_{a_k}^{b_k} \left\{ (-e^{-t})' \sin t \right\} dt$$

$$= \left[(-e^{-t}) \sin t \right]_{a_k}^{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \cos t) dt \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt = \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{-t} (-\cos t) \right]_{a_k}^{b_k} + \left[(-e^{-t}) \sin t \right]_{a_k}^{b_k} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2k-\frac{7}{6}\right)\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\left(2k-\frac{11}{6}\right)\pi}$$

$$\left(\because \cos a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos b_k = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

よって、

$$I_n = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2k-\frac{7}{6}\right)\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\left(2k-\frac{11}{6}\right)\pi} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

$$= \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

$$(答) \quad I_n = \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n\pi} = 0 \quad \text{なので、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

$$(答) \quad \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

II

(1) $f(x)$ を x について微分すると,

$$f'(x) = \frac{1}{k+1} - \sqrt[k+1]{\beta} \frac{1}{k+1} x^{\frac{-k}{k+1}}$$

$f'(x) = 0$ を解くと,

$$x^{\frac{-k}{k+1}} = \beta^{\frac{1}{k+1}}$$

$$x = \sqrt[k]{\beta}$$

であることから, $f(x)$ の $x > 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$\sqrt[k]{\beta}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$$f(\sqrt[k]{\beta}) = \frac{1}{k+1} (\sqrt[k]{\beta} + \alpha) - \sqrt[k]{\beta} = \frac{k}{k+1} \left(\frac{\alpha}{k} - \sqrt[k]{\beta} \right) \geq 0 \quad \left(\because \frac{\alpha}{k} \geq \sqrt[k]{\beta} \right)$$

最小値が 0 以上なので, $f(x) \geq 0$ であることが示された。

(証明終)

(2) 数学的帰納法によって証明する。

[I] $n = 1$ のとき

両辺ともに x_1 となるので成り立つ。

[II] $n = a$ のとき成り立つと仮定する。

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_a}{a} \geq \sqrt[a]{x_1 x_2 \cdots x_a}$$

が成立するので, $x_i > 0$ (i は正の整数) であることから, (1) の式において

$k = a$, $\alpha = x_1 + x_2 + \cdots + x_a$, $\beta = x_1 x_2 \cdots x_a$ とおくことができる。

すると, $x_{a+1} \geq 0$ に対して

$$f(x_{a+1}) = \frac{1}{a+1} (x_{a+1} + x_1 + x_2 + \cdots + x_a) - \sqrt[a+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{a+1}} \geq 0$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_a + x_{a+1}}{a+1} \geq \sqrt[a+1]{x_1 x_2 \cdots x_a x_{a+1}}$$

よって, $n = a+1$ のときも成り立つ。

[I], [II] より, n を正の整数とし, $x_i > 0$ (i は正の整数) であるとき,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \text{ が成り立つことが数学的帰納法により示された。}$$

(証明終)

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ なので, (2) で証明した式を用いると,

$$\begin{aligned} & \frac{S}{10} \\ &= \frac{a_1 a_2 (a_3 + a_4 + a_5) + a_1 a_3 (a_4 + a_5) + a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 (a_4 + a_5) + a_2 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5}{10} \\ &\geq \sqrt[10]{(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^6} = \sqrt[5]{M^3} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって,

$$S \geq 10 \sqrt[5]{M^3}$$

(証明終)

$$(1) \quad A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{に} A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{を代入して,}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2}x - 3 \\ \frac{3}{2}x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

成分を比較して、方程式を解くと、 $x=2$

同様に、 $A \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2}y - 3 \\ \frac{3}{2}y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

成分を比較して、方程式を解くと、 $y=1$

(答) $x=2, y=1$

$$(2) \quad B \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \text{に, } B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix}, x=2, y=1 \text{を代入して,}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b \end{pmatrix}$$

成分を比較して、連立方程式を解くと、 $a=\frac{1}{3}, b=0$

同様に、 $B \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c+d \\ c+d \end{pmatrix}$$

成分を比較して、連立方程式を解くと、 $c=0, d=3$

(答) $a=\frac{1}{3}, b=0, c=0, d=3$

$$(3) \quad AB = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

よって、 $AB=BA$ であることが示された。

(証明終)

(4) n 回硬貨を投げて表の出た回数を k とおく。

(3)より $AB=BA$ なので、 X_n は表裏の出る順番によらず、 k によって決まる。

$$\begin{aligned} X_n &= B^{n-k} A^k X_0 = B^{n-k} A^k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= B^{n-k} A^k \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= B^{n-k} \left\{ 2^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{2^k}{3^{n-k}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3^{n-k}}{2^k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

また、 n 回硬貨を投げて表が k 回出る確率は ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ であるので、求める期待値は

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n \left\{ {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{2^k}{3^{n-k}} \times 2 + \frac{3^{n-k}}{2^k} \times 1 \right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \left[{}_nC_k (2p)^k \left(\frac{1-p}{3} \right)^{n-k} + {}_nC_k \left(\frac{p}{2} \right)^k \{3(1-p)\}^{n-k} \right] \\ &= 2 \left(2p + \frac{1-p}{3} \right)^n + \left\{ \frac{p}{2} + 3(1-p) \right\}^n \\ &= 2 \left(\frac{5p+1}{3} \right)^n + \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \left\{ {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{2^k}{3^{n-k}} \times 1 + \frac{3^{n-k}}{2^k} \times 1 \right) \right\} \\ &= \left(\frac{5p+1}{3} \right)^n + \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$$(答) \quad T_n = 2 \left(\frac{5p+1}{3} \right)^n + \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n, \quad S_n = \left(\frac{5p+1}{3} \right)^n + \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n$$

(5) $\left(\frac{5p+1}{3} \right)^n, \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n > 0$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5p+1}{3} \right)^n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n = \infty$ のいずれかが成り立てば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n^2 + S_n^2) = \infty$ となる。

$\frac{2}{5} < p$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5p+1}{3} \right)^n = \infty$ が成り立ち、

$p < \frac{4}{5}$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6-5p}{2} \right)^n = \infty$ が成り立つので、

$0 < p < 1$ を満たすどのような p に対しても、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n^2 + S_n^2) = \infty$ となる。

(証明終)