

$$(1) \quad y = \frac{e^{x-1}}{2x}$$

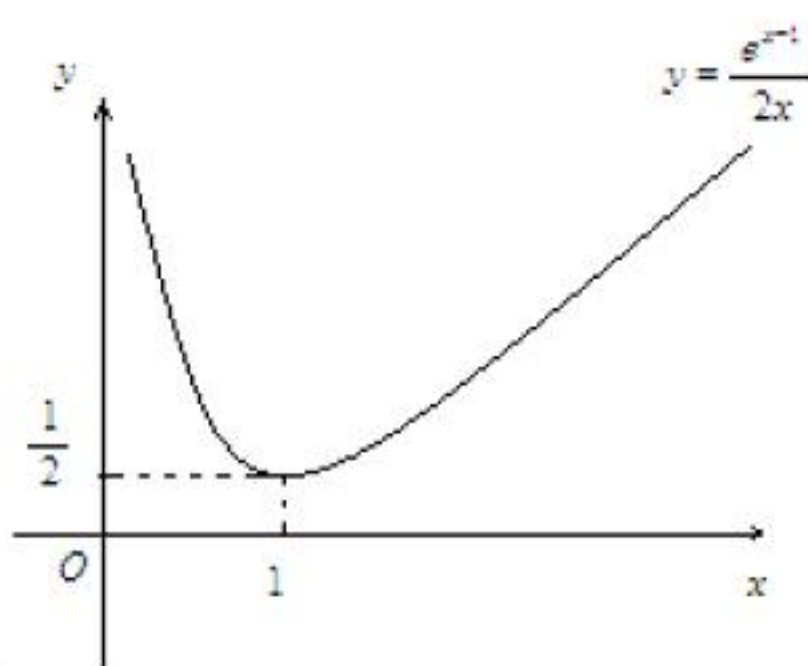
$$y' = \frac{2xe^{x-1} - 2e^{x-1}}{4x^2} = \frac{(x-1)e^{x-1}}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{xe^{x-1} \cdot 2x^2 - 4x(x-1)e^{x-1}}{4x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^{x-1}}{2x^3}$$

であることから、 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{2x}$ ($x > 0$) の増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+		+
$f(x)$			$\frac{1}{2}$	

さらに、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ であることから、グラフは次のようになる。



(答)

グラフより、 y のとりうる値の範囲は $\frac{1}{2} \leq y$

(答) $\frac{1}{2} \leq y$

$$(2) \quad (1) \text{で求めた範囲をあてはめると、} \frac{1}{2} \leq \sin t$$

これを満たす t のうち、 $2(k-1)\pi \leq t \leq 2k\pi$ を満たすものを求めると、

$$2(k-1)\pi + \frac{1}{6}\pi \leq t \leq 2(k-1)\pi + \frac{5}{6}\pi$$

$$\left(2k - \frac{11}{6}\right)\pi \leq t \leq \left(2k - \frac{7}{6}\right)\pi$$

$$(答) \quad a_k = \left(2k - \frac{11}{6}\right)\pi, \quad b_k = \left(2k - \frac{7}{6}\right)\pi$$

$$(3) \quad \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt = \int_{a_k}^{b_k} \left\{ e^{-t} (-\cos t)' \right\} dt$$

$$= \left[e^{-t} (-\cos t) \right]_{a_k}^{b_k} - \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \cos t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt = \int_{a_k}^{b_k} \left\{ (-e^{-t})' \sin t \right\} dt$$

$$= \left[(-e^{-t}) \sin t \right]_{a_k}^{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \cos t) dt \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt = \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{-t} (-\cos t) \right]_{a_k}^{b_k} + \left[(-e^{-t}) \sin t \right]_{a_k}^{b_k} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2k-\frac{7}{6}\right)\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\left(2k-\frac{11}{6}\right)\pi}$$

$$\left(\because \cos a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos b_k = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

よって、

$$I_n = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} (e^{-t} \sin t) dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2k-\frac{7}{6}\right)\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\left(2k-\frac{11}{6}\right)\pi} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

$$= \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

$$(答) \quad I_n = \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n\pi} = 0 \quad \text{なので、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

$$(答) \quad \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\frac{5}{6}\pi} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{6}\pi} \right)$$

II

(1) $f(x)$ を x について微分すると,

$$f'(x) = \frac{1}{k+1} - \sqrt[k+1]{\beta} \frac{1}{k+1} x^{\frac{-k}{k+1}}$$

$f'(x) = 0$ を解くと,

$$x^{\frac{-k}{k+1}} = \beta^{\frac{1}{k+1}}$$

$$x = \sqrt[k]{\beta}$$

であることから, $f(x)$ の $x > 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$\sqrt[k]{\beta}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$$f(\sqrt[k]{\beta}) = \frac{1}{k+1} (\sqrt[k]{\beta} + \alpha) - \sqrt[k]{\beta} = \frac{k}{k+1} \left(\frac{\alpha}{k} - \sqrt[k]{\beta} \right) \geq 0 \quad \left(\because \frac{\alpha}{k} \geq \sqrt[k]{\beta} \right)$$

最小値が 0 以上なので, $f(x) \geq 0$ であることが示された。

(証明終)

(2) 数学的帰納法によって証明する。

[I] $n = 1$ のとき

両辺ともに x_1 となるので成り立つ。

[II] $n = a$ のとき成り立つと仮定する。

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_a}{a} \geq \sqrt[a]{x_1 x_2 \cdots x_a}$$

が成立するので, $x_i > 0$ (i は正の整数) であることから, (1) の式において

$k = a$, $\alpha = x_1 + x_2 + \cdots + x_a$, $\beta = x_1 x_2 \cdots x_a$ とおくことができる。

すると, $x_{a+1} \geq 0$ に対して

$$f(x_{a+1}) = \frac{1}{a+1} (x_{a+1} + x_1 + x_2 + \cdots + x_a) - \sqrt[a+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{a+1}} \geq 0$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_a + x_{a+1}}{a+1} \geq \sqrt[a+1]{x_1 x_2 \cdots x_a x_{a+1}}$$

よって, $n = a+1$ のときも成り立つ。

[I], [II] より, n を正の整数とし, $x_i > 0$ (i は正の整数) であるとき,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \text{ が成り立つことが数学的帰納法により示された。}$$

(証明終)

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ なので, (2) で証明した式を用いると,

$$\begin{aligned} & \frac{S}{10} \\ &= \frac{a_1 a_2 (a_3 + a_4 + a_5) + a_1 a_3 (a_4 + a_5) + a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 (a_4 + a_5) + a_2 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5}{10} \\ &\geq \sqrt[10]{(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^6} = \sqrt[5]{M^3} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって,

$$S \geq 10 \sqrt[5]{M^3}$$

(証明終)

- (1) $y=f(x)$ 上の任意の点は正の実数 t を用いて $\left(t, t^{-4} + \frac{1}{8}t\right)$ と表せる。

これが F によって移動した点は

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^{-4} + \frac{1}{8}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ ct^{-4} + \left(b + \frac{c}{8}\right)t \end{pmatrix}$$

この点が $y=f(x)$ 上にあるので,

$$(at)^{-4} + \frac{1}{8}at = ct^{-4} + \left(b + \frac{c}{8}\right)t$$

$$(a^{-4} - c)t^{-4} + \frac{1}{8}(a - 8b - c)t = 0$$

これが t についての恒等式となればよいので,

$$b = \frac{a - a^{-4}}{8}, \quad c = a^{-4}$$

$$(\text{答}) \quad b = \frac{a - a^{-4}}{8}, \quad c = a^{-4}$$

- (2) 点 P の x 座標を $p(>0)$ とすると、 P と原点を通る直線は

$$y = \frac{p^{-4} + \frac{1}{8}p}{p}x = \left(p^{-5} + \frac{1}{8}\right)x$$

これと C の交点の x 座標を求める。

$$x^{-4} + \frac{1}{8}x = \left(p^{-5} + \frac{1}{8}\right)x$$

$$x^5 = p^5$$

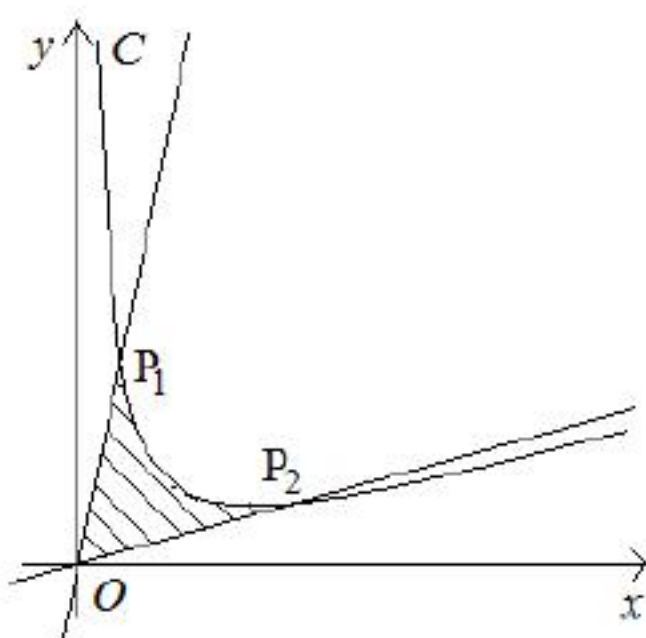
$$x = p$$

よって、 C と、 P と原点を通る直線は点 P でのみ交わる。

(証明終)

(3)

- (a) 求めるのは図斜線部の面積。



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x_1f(x_1) - \frac{1}{2}x_2f(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \left(x^{-4} + \frac{1}{8}x\right)dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x_1^{-3} + \frac{1}{8}x_1^2 - \left(x_2^{-3} + \frac{1}{8}x_2^2 \right) \right\} + \left[-\frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{16}x^2 \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{1}{2}x_1^{-3} + \frac{1}{16}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^{-3} - \frac{1}{16}x_2^2 + \left(-\frac{1}{3}x_2^{-3} + \frac{1}{16}x_2^2 \right) - \left(-\frac{1}{3}x_1^{-3} + \frac{1}{16}x_1^2 \right) \\ &= \frac{5}{6}(x_1^{-3} - x_2^{-3}) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S = \frac{5}{6}(x_1^{-3} - x_2^{-3})$$

- (b) Q_1, Q_2 は $y=f(x)$ 上にあり、それぞれの x 座標は、 ax_1, ax_2 なので

(a)の答を用いると,

$$T = \frac{5}{6} \left\{ (ax_1)^{-3} - (ax_2)^{-3} \right\} = \frac{1}{a^3} S$$

$$\therefore \frac{T}{S} = \frac{1}{a^3}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{T}{S} = \frac{1}{a^3}$$