

理学部数学科試験問題

数 学

注 意

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は1ページから3ページにわたっています。問題冊子が不備な場合は、直ちにその旨を監督者に申し出て下さい。
3. 解答用紙は3枚で、問題冊子とは別になっています。各解答用紙には志望学部を書く欄が1か所と受験番号を書く欄が2か所あります。もれなく記入して下さい。
4. 解答は指定された解答用紙に記入して下さい。その際、解答用紙の番号を間違えないようにして下さい。
5. 解答用紙の裏面には解答を書いてはいけません。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子、計算用紙は持ち帰って下さい。

I $a > 0$ に対して、曲線 $y = \log x$ と x 軸、および 2 直線 $x = a$, $x = a + 1$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $f(a)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f'(a)$, $f(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $f(a)$ の最小値を求めよ。

(解答用紙は、**I** を使用せよ)

数 I

Ⅱ 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{e^{x-1}}{2x}$ ($x > 0$) のグラフをかけ。また、 y のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $2(k-1)\pi \leq t \leq 2k\pi$ を満たし、かつ、 $\sin t$ の値が (1) で求めた範囲に含まれるような t の値の範囲 $a_k \leq t \leq b_k$ を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $I_n = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} e^{-t} \sin t \, dt$ とする。 I_n を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

(解答用紙は、**Ⅱ** を使用せよ)

数 Ⅱ

Ⅲ 次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とし、 $x > 0$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{k+1}(x + \alpha) - \sqrt[k+1]{\beta x}$$

とおく。ただし、 α, β は

$$\alpha > 0, \beta > 0, \frac{\alpha}{k} \geq \sqrt[k]{\beta}$$

を満たす定数である。このとき、 $f(x) \geq 0$ であることを示せ。

(2) n を正の整数とする。 $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ のとき

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

が成立することを示せ。

(3) M を正の定数とし、5 個の正の数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = M$ を満たしている

とする。 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 から取り出した 3 つの数の積 $a_i a_j a_k$ を S_{ijk} と表すことにする。

$1 \leq i < j < k \leq 5$ を満たすすべての整数 i, j, k についての S_{ijk} の和を S とおく。このとき、 $S \geq 10\sqrt[5]{M^3}$ であることを示せ。

(解答用紙は、Ⅲ を使用せよ)

数 Ⅲ