

医学部医学科試験問題

数 学

注 意

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は1ページから3ページにわたっています。問題冊子が不備な場合は、直ちにその旨を監督者に申し出て下さい。
3. 解答用紙は3枚で、問題冊子とは別になっています。各解答用紙には志望学部を書く欄が1か所と受験番号を書く欄が2か所あります。もれなく記入して下さい。
4. 解答は指定された解答用紙に記入して下さい。その際、解答用紙の番号を間違えないようにして下さい。
5. 解答用紙の裏面には解答を書いてはいけません。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子、計算用紙は持ち帰って下さい。

I 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{e^{x-1}}{2x}$ ($x > 0$) のグラフをかけ。また、 y のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $2(k-1)\pi \leq t \leq 2k\pi$ を満たし、かつ、 $\sin t$ の値が (1) で求めた範囲に含まれるような t の値の範囲 $a_k \leq t \leq b_k$ を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $I_n = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} e^{-t} \sin t \, dt$ とする。 I_n を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

(解答用紙は、**I** を使用せよ)

医 I

Ⅱ 次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とし、 $x > 0$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{k+1}(x + \alpha) - \sqrt[k+1]{\beta x}$$

とおく。ただし、 α, β は

$$\alpha > 0, \beta > 0, \frac{\alpha}{k} \geq \sqrt[k]{\beta}$$

を満たす定数である。このとき、 $f(x) \geq 0$ であることを示せ。

(2) n を正の整数とする。 $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ のとき

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

が成立することを示せ。

(3) M を正の定数とし、5個の正の数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = M$ を満たしている

とする。 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 から取り出した3つの数の積 $a_i a_j a_k$ を S_{ijk} と表すことにする。

$1 \leq i < j < k \leq 5$ を満たすすべての整数 i, j, k についての S_{ijk} の和を S とおく。このとき、 $S \geq 10\sqrt[5]{M^3}$ であることを示せ。

(解答用紙は、**Ⅱ** を使用せよ)

医 Ⅱ

Ⅲ $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす x, y を求めよ。

(2) (1) で求めた x, y に対して

$$B \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす a, b, c, d を求めよ。

(3) $AB = BA$ であることを示せ。

(4) 表の出る確率が p , 裏の出る確率が $1-p$ である硬貨を用意する。ただし, p は $0 < p < 1$

を満たす定数である。 $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とし, $X_1, X_2, X_3, \dots$ を次のように決める:

X_{n-1} が決まったとき, 硬貨を投げて表が出れば $X_n = AX_{n-1}$,

裏が出れば $X_n = BX_{n-1}$ によって X_n を決める。

$X_n = \begin{pmatrix} t_n \\ s_n \end{pmatrix}$ とおくとき, t_n の期待値 T_n と s_n の期待値 S_n をそれぞれ求めよ。

(5) p が $0 < p < 1$ を満たすどのような定数であっても, $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n^2 + S_n^2) = \infty$ であることを示せ。

(解答用紙は, Ⅲ を使用せよ)

医 Ⅲ