

(条件 1)より,

$$3.25 \leq \sqrt{a+b} < 3.35 \Leftrightarrow 10.5625 \leq a+b < 11.2225$$

である。よって, a, b は整数なので,

$$a+b=11$$

が成り立つ。また, (条件 2)より,

$$1.55 \leq \sqrt{\frac{a}{b}} < 1.65 \Leftrightarrow 2.4025 \leq \frac{a}{b} < 2.7225$$

であるが, $a+b=11$ の下でこれを満たす正の整数 a, b は, $a=8, b=3$ のみである。

(答) $a=8, b=3$

α, β は $x^2 + 2x + 3 = 0$ の解なので、

$$\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$$

$$\beta^2 + 2\beta + 3 = 0$$

が成り立ち、このとき、

$$\frac{4\alpha^2 + 5\alpha + 6}{4\beta^2 + 5\beta + 6} = \frac{4(\alpha^2 + 2\alpha + 3) - 3\alpha - 6}{4(\beta^2 + 2\beta + 3) - 3\beta - 6} = \frac{-3\alpha - 6}{-3\beta - 6} = \frac{\alpha + 2}{\beta + 2}$$

$$\frac{4\beta^2 + 5\beta + 6}{4\alpha^2 + 5\alpha + 6} = \left(\frac{4\alpha^2 + 5\alpha + 6}{4\beta^2 + 5\beta + 6} \right)^{-1} = \frac{\beta + 2}{\alpha + 2}$$

が得られる。また、解と係数の関係から、

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha^2 + 5\alpha + 6}{4\beta^2 + 5\beta + 6} + \frac{4\beta^2 + 5\beta + 6}{4\alpha^2 + 5\alpha + 6} &= \frac{\alpha + 2}{\beta + 2} + \frac{\beta + 2}{\alpha + 2} \\ &= \frac{(\alpha + 2)^2 + (\beta + 2)^2}{(\alpha + 2)(\beta + 2)} \\ &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2) + 4(\alpha + \beta) + 8}{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 4(\alpha + \beta) + 8}{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4} \\ &= \frac{(-2)^2 - 2 \cdot 3 + 4(-2) + 8}{3 + 2(-2) + 4} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\frac{4\alpha^2 + 5\alpha + 6}{4\beta^2 + 5\beta + 6} \cdot \frac{4\beta^2 + 5\beta + 6}{4\alpha^2 + 5\alpha + 6} = 1$$

なので、 $\frac{4\alpha^2 + 5\alpha + 6}{4\beta^2 + 5\beta + 6}, \frac{4\beta^2 + 5\beta + 6}{4\alpha^2 + 5\alpha + 6}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは、

$$x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

である。

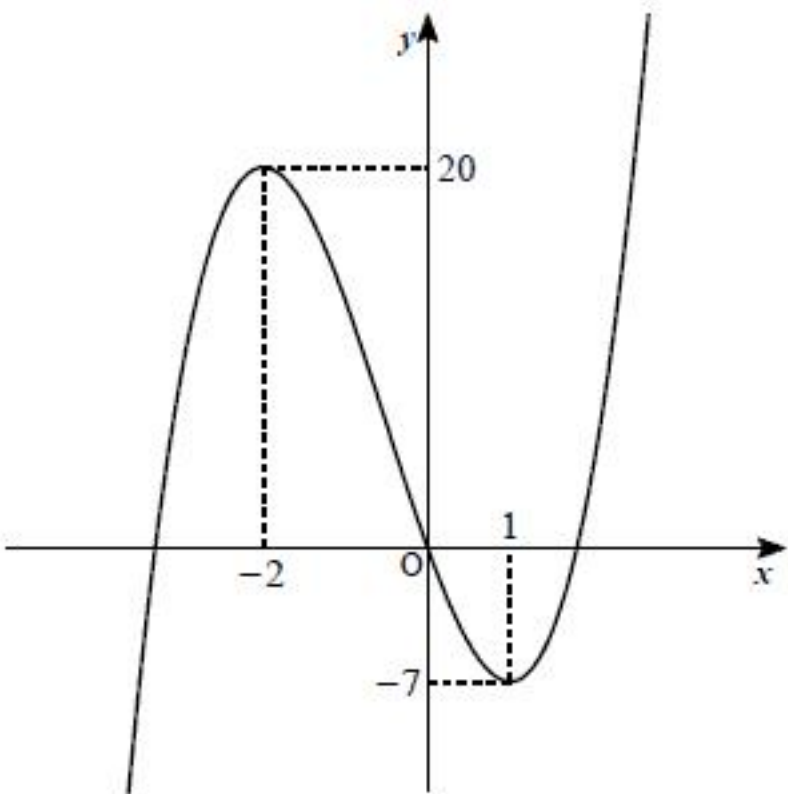
$$(\text{答}) \quad x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

(1)

関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ を x で微分すると、
 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$
 となるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

よって、関数 $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



(答) 前図

(2)

$$y = ax + a + 13 \Leftrightarrow a(x+1) - y + 13 = 0$$

より、この直線は、

$$\begin{cases} x+1=0 \\ -y+13=0 \end{cases}$$

を満たす点を必ず通る。これを解くと、 $x = -1, y = 13$ であるので、その点は $(-1, 13)$ である。
 また、

$$f(-1) = 2(-1)^3 + 2(-1)^2 - 12(-1) = 13$$

であるから、点 $(-1, 13)$ は $y = f(x)$ 上の点である。

(証明終)

(3)

$y = f(x)$ のグラフと $y = ax + x + 13$ のグラフの共有点の個数は、関数 $f(x) = ax + x + 13$ の解の個数に等しい。そこで、

$$\begin{aligned} f(x) - (ax + a + 13) &= (2x^3 + 3x^2 - 12x) - (ax + a + 13) \\ &= 2x^3 + 3x^2 - (a+12)x - a - 13 \\ &= (x+1)(2x^2 + x - a - 13) \end{aligned}$$

について考える。

[1] $2x^2 + x - a - 13 = 0$ が $x = -1$ を解に持つとき
 このとき、

$$2(-1)^2 + (-1) - a - 13 = 0 \Leftrightarrow a = -12$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) - (ax + a + 13) &= (x+1)(2x^2 + x - 1) \\ &= (x+1)^2(2x-1) \end{aligned}$$

なので、共有点は 2 個である。

[2] $a \neq -12$ のとき

2 次方程式 $2x^2 + x - a - 13 = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-a - 13) = 8a + 105$$

である。よって、

$$D > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{105}{8} \text{ のとき、共有点 3 個}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{105}{8} \text{ のとき、共有点 2 個}$$

$$D < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{105}{8} \text{ のとき、共有点 1 個}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める共有点の個数は、

$$a > -\frac{105}{8}, a \neq -12 \text{ のとき、共有点 3 個}$$

$$a = -\frac{105}{8}, -12 \text{ のとき、共有点 2 個}$$

$$a < -\frac{105}{8} \text{ のとき、共有点 1 個}$$

である。

(答) $a > -\frac{105}{8}, a \neq -12$ のとき、共有点 3 個

$a = -\frac{105}{8}, -12$ のとき、共有点 2 個

$a < -\frac{105}{8}$ のとき、共有点 1 個